

L'hotel straordinario, o il milleunesimo viaggio di Ion il Tranquillo

Di Stanislaw Lem

Arrivai a casa piuttosto tardi - l'incontro al club «Nebulosa di Andromeda» si era trascinato ben oltre l'una. Fui tormentato tutta notte dagli incubi. Sognai di aver inghiottito un enorme Kurd!; poi sognai di essere tornato sul pianeta Durditov e di non riuscire a sfuggire a una di quelle terribili macchine che trasformano le persone in esagoni; poi... Di solito la gente sconsiglia di mischiare l'età e l'idromele. Una telefonata inattesa mi riportò alla realtà. Era il professor Tarantog, mio vecchio amico e compagno di viaggi interstellari.

- Un problema urgente, mio caro Ion, - gli sentii dire.

- Gli astronomi hanno scoperto uno strano oggetto nel cosmo: una misteriosa linea nera che unisce due galassie. Nessuno sa cosa stia succedendo. Persino i migliori telescopi e radiotelescopi piazzati sui razzi non bastano a dissipare il mistero. Tu sei la nostra ultima speranza. Voli subito verso la nebulosa ACD-1587.

Il giorno dopo ritirai dal carrozziere il mio vecchio razzo fotonico e ci installai l'acceleratore temporale e il robot elettronico che conosce tutte le lingue del cosmo e tutte le storie sul viaggio interstellare (è garantito per intrattenermi per almeno cinque anni di viaggio). Quindi partii per occuparmi del caso in questione.

Proprio quando il robot aveva esaurito la sua intera scorta di storie e aveva cominciato a ripetersi (non c'è niente di peggio di un robot elettronico che ripete una vecchia storia per la decima volta), la meta del mio viaggio apparve in lontananza. Le galassie che coprivano la linea misteriosa erano ora alle mie spalle, e davanti a me stava... l'hotel Cosmos. Qualche tempo prima avevo costruito un piccolo pianeta per alcuni esuli interstellari vagabondi, ma quelli lo avevano fatto a pezzi e si erano ritrovati di nuovo senza un rifugio. Allora avevano deciso di smettere di vagare per galassie sconosciute e avevano messo su un edificio grandioso: un hotel per tutti i viaggiatori del cosmo. Questo hotel si estendeva attraverso quasi tutte le galassie. Dico «quasi tutte» perché gli esuli smantellarono alcune galassie disabitate e rubarono qualche costellazione fuori mano da ognuna delle rimanenti.

Comunque, costruendo l'hotel avevano fatto un lavoro meraviglioso. In ogni stanza c'erano rubinetti da cui scorreva plasma caldo o freddo. Se lo desideravi, potevi essere smembrato in atomi per la notte, e la mattina dopo il portiere ti avrebbe rimesso insieme.

Cosa più importante, nell'hotel c'era un *numero infinito di stanze*. Gli esuli speravano che da quel momento in poi nessuno avrebbe più dovuto sentire la famosa frasetta irritante che li aveva afflitti nei loro vagabondaggi: «Non c'è più posto».

Nonostante ciò, non ebbi fortuna. La prima cosa che attrasse la mia attenzione entrando nella hall fu un cartello: «I delegati del congresso di zoologia cosmica sono pregati di registrarsi al 127° piano».

Siccome gli zoologi cosmici venivano da tutte le galassie, e di galassie ne esiste un numero infinito, saltò fuori che tutte le stanze erano occupate da partecipanti del congresso. Non c'era posto per me. Il concierge tentò, è vero, di convincere qualche delegato a stringersi un po', in modo che potessi dividere la stanza con uno di loro. Ma quando scoprii che uno dei potenziali compagni di stanza respirava fluorina e che un altro considerava normale una temperatura ambientale sugli 860°, rifiutai cortesemente questi «piacevoli» coinquilini.

Per fortuna il direttore dell'hotel era stato un esule e ricordava il buon servizio che avevo reso a lui e ai suoi compagni. Avrebbe cercato personalmente una stanza per me. In fondo, passando la notte

nello spazio interstellare uno poteva prendersi una polmonite. Dopo aver meditato un po', il direttore si rivolse al concierge e gli disse:

- Mettilo nella stanza 1.
- E dove metterò l'ospite della 1?
- Mettilo nella 2. Sposta l'ospite della 2 nella 3, quello della 3 nella 4 e così via.

Fu solo in quel momento che cominciai ad apprezzare le qualità insolite dell'hotel. Se ci fosse stato solo un numero finito di stanze, l'ospite dell'ultima si sarebbe dovuto trasferire nello spazio interstellare. Ma siccome l'hotel aveva un numero infinito di stanze, c'era spazio per tutti, e io potei prendere possesso di una stanza senza privare nessun zoologo cosmico della sua.

Il mattino dopo, non fui stupito di scoprire che mi si domandava di spostarmi nella stanza numero 1.000.000. Semplicemente, alcuni zoologi cosmici erano arrivati in ritardo dalla galassia VSK-3472, e si dovette trovare una stanza per altri 999.999 ospiti. Ma il terzo giorno del mio soggiorno nell'hotel, mentre stavo andando dal concierge per pagare la mia stanza, vidi con disappunto che dal suo banco si estendeva una fila la cui fine scompariva da qualche parte nei pressi delle Nubi di Magellano. In quell'istante sentii una voce:

- Scambio due francobolli della nebulosa di Andromeda per uno di Sirio.
- Chi ha il francobollo erpeano della cinquantasettesima era cosmica ?

Confuso, mi rivolsi al concierge:

- Chi sono queste persone?
- Questo è il congresso interstellare dei filatelici.
- E ce ne sono molti?
- Un insieme infinito: un rappresentante per ogni galassia.
- Ma come farete a trovargli una stanza? Dopotutto, gli zoologi cosmici non se ne vanno fino a domani...
- Non lo so. Sto giusto andando a parlarne un momento con il direttore.

Ad ogni modo, il problema questa volta si rivelò molto più difficile, e un momento si trasformò in un'ora. Alla fine il concierge lasciò l'ufficio del direttore e cominciò a dare le sue disposizioni. Anzitutto chiese all'ospite della stanza 1 di spostarsi nella 2. Questo mi sembrò strano, perché sapevo per esperienza personale che uno spostamento del genere avrebbe liberato una sola stanza, mentre dovevamo trovare posto per nientemeno che un insieme infinito di filatelici. Ma il concierge continuò a dare ordini:

- Mettete l'ospite della 2 nella 4, quello della 3 nella 6, e in generale mettete l'ospite della stanza n nella stanza $2n$.

Ora il suo piano diventava chiaro: con questo sistema avrebbe liberato l'insieme infinito delle stanze dispari e sarebbe stato in grado di sistemarvi i filatelici. Così, alla fine i numeri pari si trovano a essere occupati dagli zoologi cosmici e i numeri dispari dai filatelici. (Non ho detto di me: dopo tre giorni di frequentazione ero in così buoni rapporti con gli zoologi cosmici che ero stato scelto come rappresentante onorario al loro congresso; perciò dovetti abbandonare la mia stanza insieme a tutti loro e spostarmi dal numero 1.000.000 al numero 2.000.000). Invece un mio amico filatelico che era 574esimo nella coda ottenne la stanza 1147. In generale, il filatelico n -esimo nella coda ottenne il numero di stanza $2n - 1$.

Il giorno dopo la situazione delle stanze si semplificò:

Il congresso degli zoologici cosmici terminò e loro se ne tornarono a casa. Io mi trasferii dal direttore, che aveva una stanza vuota nel suo appartamento. Ma ciò che è bene per gli ospiti non sempre fa piacere alla direzione. Dopo alcuni giorni il mio generoso anfitrione si rattristò.

- Qual è il problema? - gli chiesi.

- Metà delle stanze sono vuote. Non raggiungeremo il preventivo di bilancio.

Sinceramente, non ero proprio sicuro di quale preventivo intendesse; dopotutto, gli stavano pagando un numero infinito di stanze, ma lo stesso gli diedi questo consiglio:

- Be', perché non avvicina gli ospiti tra loro? Li sposti e riempirà tutte le stanze.

Questo si rivelò facile da fare. I filatelici occupavano solo le stanze dispari: 1, 3, 5, 7, 9 eccetera. Lasciammo stare l'ospite della 1, spostammo quello della 3 nella 2, quello della 5 nella 3, quello della 7 nella 4, eccetera. Alla fine le stanze erano di nuove tutte piene, e non era arrivato nemmeno un nuovo ospite.

Ma questo non pose fine all'infelicità del direttore. Mi spiegarono che gli esuli non si erano accontentati di creare l'hotel Cosmos. Gli instancabili costruttori erano andati avanti e avevano fondato un insieme infinito di hotel, ognuno dei quali aveva infinite stanze. Per far ciò avevano smantellato così tante galassie che l'equilibrio intergalattico ne era stato sconvolto, cosa che poteva comportare serie conseguenze. Era stato quindi chiesto loro di chiudere tutti gli hotel eccetto il nostro, e di rimettere al suo posto il materiale usato. Ma era difficile eseguire quest'ordine, dal momento che tutti gli hotel (incluso il nostro) erano pieni. Al direttore era stato chiesto di spostare tutti gli ospiti da un numero infinito di hotel - ognuno dei quali con infiniti ospiti - a un unico hotel, che era già pieno!

- Non ne posso più! - urlò il direttore. - Prima sistemo un ospite in un hotel al completo, poi altri 999.999 ospiti, poi un insieme infinito; e ora vogliono che nello stesso hotel trovi spazio per un ulteriore insieme infinito di insiemi infiniti di ospiti. No, l'hotel non è fatto di gomma; che li mettano dove gli pare.

Ma un ordine è un ordine, e all'hotel avevano cinque giorni per prepararsi all'arrivo dei nuovi ospiti. Nessuno lavorò, in quei cinque giorni: tutti pensavano a come risolvere il problema. Fu bandita una gara: il premio era un tour di una delle galassie. Ma tutte le soluzioni avanzate vennero ritenute inattuabili. Poi un apprendista cuoco fece questa proposta: lasciare l'ospite della stanza 1 nel suo alloggio attuale, spostare l'ospite della 2 nella 1001, quello della 3 nella 2001 eccetera. Fatto ciò, mettere gli ospiti del secondo hotel nelle stanze 2, 1002, 2002 eccetera del nostro hotel, gli ospiti del terzo hotel nelle stanze 3, 1003, 2003, eccetera. Il progetto venne respinto, perché non era chiaro dove si dovessero alloggiare gli ospiti del milleunesimo hotel; dopotutto, quelli dei primi 1000 hotel avrebbero già occupato tutte le stanze. Ci ricordammo in questa occasione che quando il Senato di Roma, nel suo servilismo, si era offerto di rinominare il mese di settembre «Tiberio» in onore dell'imperatore (ai mesi precedenti erano già stati dati i nomi di Giulio Cesare e Augusto), Tiberio aveva risposto causticamente: «E cosa offrirete al tredicesimo Cesare?»

Il contabile dell'hotel propose una variante eccellente. Ci suggerì di fare uso delle proprietà della progressione geometrica per risistemare gli ospiti in questo modo: mettere quelli del primo hotel nelle stanze 2, 4, 8, 16, 32 eccetera (questi numeri formano una progressione geometrica in base 2). Gli ospiti del secondo hotel andavano messi nelle stanze 3, 9, 27, 81 eccetera (questi sono i membri della progressione geometrica in base 3). La sua proposta era di risistemare gli ospiti degli altri hotel in una maniera simile. Ma il direttore gli domandò: i - E dovremmo usare la progressione in base 4 per il terzo hotel?

- Naturalmente, - rispose il contabile.

- Allora non otteniamo nulla: in fondo, nella stanza 4 abbiamo già un ospite del primo hotel. Do-

ve metteremo la gente del terzo hotel ?

Venne il mio turno di parlare; all'Accademia Stellare non facevano studiare cinque anni di matematica per niente.

- Usate i numeri primi. Mettete gli ospiti del primo hotel ai numeri 2, 4, 8, 16..., quelli del secondo hotel nei numeri 3, 9, 27, 81..., quelli del terzo nei numeri 5, 25, 125, 625..., quelli del quarto nei numeri 7, 49, 343...

- E non succederà anche in questo caso che qualche stanza abbia due ospiti? - chiese il direttore.

- No. In effetti, se si prendono due numeri primi, nessuna delle potenze intere positive di uno può equivalere a quelle dell'altro. Se p e q sono numeri primi, con $p \neq q$, e m e n sono numeri naturali, allora $p^m \neq q^n$.

Il direttore diede ragione al mio metodo e trovò immediatamente una miglioria grazie alla quale bastavano solo i numeri primi 2 e 3. Propose cioè di mettere gli ospiti della stanza m -esima dell'hotel n -esimo nella stanza $2^m 3^n$. Questo funziona perché se $m \neq p$ e $n \neq q$, allora $2^m 3^n \neq 2^p 3^q$. Quindi nessuna stanza avrebbe avuto due occupanti.

Questa proposta deliziò tutti. Era una soluzione al problema che avevamo supposto insolubile. Ma né il direttore né io vincemmo il premio; troppe stanze sarebbero rimaste vuote, se avessimo adottato la nostra soluzione (con la mia, le stanze come la 6, la 10, la 12 e più in generale tutte le stanze che non era potenze di primi; con quella del direttore, tutte le stanze i cui numeri non potevano essere scritti nella forma $2^m 3^n$). La soluzione migliore fu proposta da uno dei filatelici, il presidente dell'Accademia di Matematica della galassia del Cigno, che suggerì di procedere a una tabulazione nelle cui righe comparisse il numero dell'hotel, e nelle colonne i numeri delle stanze. Per esempio, all'intersezione della riga 4 con la colonna 6 sarebbe comparsa la sesta stanza del quarto hotel. Ecco la tabella (in realtà, solo la parte superiore, perché scriverla per intero richiederebbe l'impiego di infinite righe e colonne).

(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	...	(1,n)
(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	...	(2,n)
(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	...	(3,n)
(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	...	(4,n)
(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	...	(5,n)
.....						
.....						
(m,1)	(m,2)	(m,3)	(m,4)	(m,5)	...	(m,n)

- E ora sistemate gli ospiti secondo i quadrati, - disse il matematico-filatelico.

- Cosa? - Il direttore non capiva.

- Secondo i quadrati. Nella stanza 1 mettete l'ospite di (1,1), cioè della prima stanza del primo hotel; nella 2 mettete l'ospite di (1,2), cioè della seconda stanza del primo hotel; nella 3 mettete l'ospite di (2,2), la seconda stanza del secondo hotel, e nella 4... l'ospite di (2,1), la prima stanza del secondo hotel. In questo modo avremo sistemato gli ospiti del quadrato in alto a sinistra con lato 2. Dopo di che mettete l'ospite di (1,3) nella stanza 5, di (2,3) nella stanza 6, di (3,3) nella 7, di (3,2) nella 8, di (3,1) nella 9. (Queste stanze riempiono il quadrato di lato 3). E continuiamo in questo modo:

(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	...	(1,n)
(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	...	(2,n)
(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	...	(3,n)
(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	...	(4,n)
(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	...	(5,n)
.....						
.....						
(n,1)	(n,2)	(n,3)	(n,4)	(n,5)	...	(n,n)

- Ci sarà davvero spazio per tutti? - Il direttore era dubbioso.

- Naturale. Dopotutto, secondo questo schema sistemiamo gli ospiti delle prime n stanze dei primi n hotel nelle prime n^2 stanze. Quindi, prima o poi ogni ospite riceverà una stanza. Per esempio, se consideriamo l'ospite della stanza 136 dell'hotel numero 217, troviamo che lui riceverà una stanza al duecentodiciassettesimo passaggio. Possiamo anche calcolare facilmente quale stanza sarà: la numero $216^2 + 136$. Più in generale, se l'ospite occupa la stanza n nell'hotel m , allora se $n \geq m$ occuperà la stanza numero $(n - 1)^2 + m$, e se $n < m$, la numero $m^2 - n + 1$.

Il progetto avanzato fu riconosciuto come il migliore: tutti gli ospiti di tutti gli hotel avrebbero trovato posto nel nostro e nemmeno una stanza sarebbe rimasta vuota. Il matematico-filatelico ricevette il premio, un tour della galassia LCR-287.

In onore del suo successo, il direttore organizzò un ricevimento al quale invitò tutti gli ospiti. Anche il ricevimento ebbe i suoi problemi. Gli occupanti delle stanze pari arrivarono in ritardo di mezz'ora, e quando comparvero si scoprì che tutte le sedie erano occupate, nonostante il nostro gentile anfitrione avesse organizzato le cose in modo che ci fosse una sedia per ogni ospite. Si dovette attendere che tutti si spostassero in nuovi posti per liberare la quantità necessaria di sedie (naturalmente, nella sala non venne portata nessuna sedia in più). Più tardi, quando iniziarono a servire il gelato agli ospiti, si scoprì che ogni ospite aveva due porzioni, nonostante il cuoco avesse di fatto preparato solo una porzione a testa. Spero che a questo punto il lettore sia in grado di immaginare da solo come questo possa essere successo.

Alla fine del ricevimento salii nel mio razzo fotonico e partii per la Terra. Dovevo informare i cosmonauti terrestri del nuovo rifugio cosmico. Inoltre, volevo consultare alcuni importanti matematici e il mio amico professor Tarantog sulle proprietà degli insiemi infiniti.