

Il numero e

di Silvana Leggerini – rivista Newton – novembre 2002

E' inafferrabile, perché è formato da una serie infinita di cifre, ma onnipresente, perché le sue proprietà lo rendono insostituibile per descrivere i fenomeni più complessi. Storia di un numero nato dall'economia e adottato da tutte le scienze.

Un giorno un vostro amico vi chiede in prestito una certa quantità di denaro che non potrà restituirvi prima di un anno. Voi siete disposti ad aiutarlo, ma volete che vi siano pagati gli interessi. Non troppo esperti sull'argomento, cominciate a fare i conti per trovare la soluzione migliore. Supponiamo che siano 1000 euro e che l'interesse da voi richiesto sia del 5 per cento annuo. Trascorso un anno, il vostro amico vi dovrà ridare $1000 + 1000 \times 0,05 = 1050$ euro. In simboli matematici, se P è la cifra prestata e r l'interesse, dopo un anno la cifra da riavere indietro è

$$P + Pr = P(1+r).$$

Avete però sentito parlare di interesse composto. Allora cominciate a pensare che sarebbe più conveniente per voi applicare al prestito la metà dell'interesse due volte all'anno. Ecco i vostri conti con l'interesse del 2,5 per cento ogni 6 mesi: alla prima rata il vostro credito sarà di 1025 euro, al quale sarà applicato di nuovo l'interesse del 2,5 per cento, che, dopo un anno, darà un credito di $1025 + 1025 \times 0,025 = 1050,625$, con un vantaggio, rispetto all'interesse annuo, di 0,625 euro.

Il limite del guadagno

La formula generale, che può essere applicata a qualunque prestito P con interesse semestrale, si ricava con semplici passaggi:

$$(P + Pr/2) + (P + Pr/2)r/2 = (P + Pr/2)(1+r/2) = P(1+r/2)(1+r/2) = P(1+r/2)^2$$

La vostra avidità ora vi spinge a calcolare quale vantaggio avreste nell'applicare un terzo dell'interesse stabilito calcolato 3 volte all'anno o un quarto dell'interesse calcolato 4 volte l'anno, e così via, dividendo l'anno in parti sempre più piccole, mesi, settimane, giorni,... e calcolando per ogni intervallo l'interesse composto r/n , dove n indica il numero degli intervalli. Ripetendo più volte il calcolo precedente, si ottiene la formula generale:

$$P (1 + r/n)^n$$

che, per $n = 3$ fornisce il risultato 1050,838 e, per $n = 4$, il risultato 1050,945. Mentre fate i vostri conti, scoprite con sorpresa che, all'aumentare del numero di divisioni, la cifra che il vostro amico dovrebbe restituirvi cresce sempre meno, tanto che alla fine la crescita diventa insignificante. Non è possibile diventare ricchi in questo modo...

Per semplificare i calcoli e comprendere meglio come questo sia possibile, poniamo l'interesse uguale a 1 (il 100 per cento, un interesse da usurai!). La formula

$$P (1 + 1/n)^n$$

permette di calcolare la cifra da riavere indietro dopo un anno con l'interesse composto calcolato ogni n -esimo di anno.

Sofferriamo l'attenzione sull'espressione $(1 + 1/n)^n$. Se cerchiamo di valutare intuitivamente quali valori assuma progressivamente al crescere di n numero intero positivo, considerando separatamente la base e l'esponente, ci troviamo di fronte a una contraddizione: infatti, poiché $1/n$ diventa sempre più piccolo, nel linguaggio matematico si dice che tende a zero, l'espressione $(1 + 1/n)$, dopo aver assunto il valore 2 per $n = 1$, diventa sempre più piccola avvicinandosi a 1. Anche $(1 + 1/n)^n$ dovrebbe dunque diventare sempre più piccolo. D'altra parte, poiché l'esponente n diventa sempre più grande, l'espressione dovrebbe diventare sempre più grande, dato che la base rimane comunque maggiore di 1.

Perché questa contraddizione? Perché abbiamo usato in modo errato uno dei concetti fondamentali dell'analisi matematica, il concetto di limite, e l'intuizione non può aiutarci in questo caso. Alcune volte è

possibile invece prevedere intuitivamente il comportamento di una formula al tendere di n all'infinito. Consideriamo, per esempio, l'espressione $a_n = (3n + 5)/(2n + 1)$. Per $n = 1000$, è $a = (3000 + 5)/(2000 + 1)$; per $n = 100.000$, $a = (300000 + 5)/(200000 + 1)$, e così via. Si noti come «+5» al numeratore e «+1» al denominatore siano sempre meno influenti nel determinare il rapporto, che si avvicina perciò sempre di più a $3/2$, pur senza mai diventare uguale a $3/2$.

Infinito indeterminato

Questo esempio ci conferma che l'infinito, il cui simbolo è ∞ , non è un numero, dal momento che si comporta in modo completamente diverso e imprevedibile. Se fosse un numero, infatti, ∞/∞ dovrebbe essere uguale a 1, mentre il limite di un'espressione che si presenta in quella forma, varia al variare dell'espressione stessa; si dice perciò che ∞/∞ è una forma indeterminata. Nel caso considerato, per esempio, scambiando il numeratore con il denominatore, il limite diventa $2/3$.

Anche $(1 + 1/n)^n$ al tendere di n all'infinito si presenta in una forma indeterminata, che viene indicata con il simbolo 1^∞ . Per farci un'idea di quale sia il suo comportamento al crescere di n , prendiamo allora una calcolatrice tascabile e troviamo alcuni valori. I risultati sono espressi dalla seguente tabella:

n	$(1+1/n)^n$
1	2
10	2,59374
100	2,70481
1000	2,71692
10000	2,71815
100000	2,71827
1000000	2,71828

Si noti come, al crescere di n , il risultato sembra stabilizzarsi intorno a un numero le cui prime sei cifre sono 2,71828. Per questo motivo sarebbe inutile calcolare l'interesse composto sul vostro credito in un intervallo di tempo sempre più piccolo.

Un numero con il nome

Fu forse riflettendo sulle regole pratiche dei suoi interessi sui prestiti di denaro che un anonimo matematico del Seicento s'imbattè per primo in questo numero.

Successivamente il celebre matematico svizzero Eulero (1707-1783) lo inquadrò entro un sistema di deduzioni logiche, gli diede un nome, indicandolo con il simbolo «e», e dimostrò anche che è irrazionale, cioè che non si può esprimere come rapporto tra due interi.

La sua espressione decimale è quindi illimitata e non periodica.

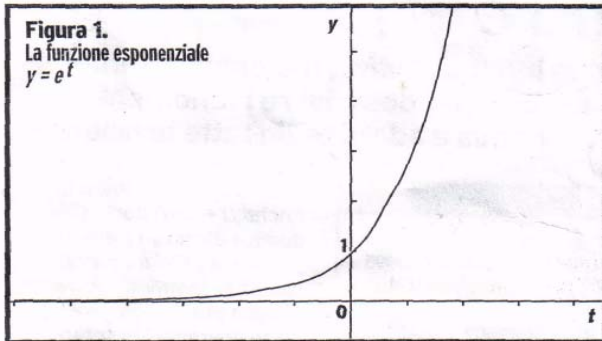
I primi 100 decimali di «e» sono:

$e = 2,7182818284590452353602874713526624977572470936999595749669676277240766303535475945713821785251664274$

Il successo planetario, però, il numero «e» lo deve al matematico scozzese John Napier (noto in Italia come Nepero, 1550 -1617) che lo scelse come base delle sue tavole logaritmiche e di conseguenza lo introdusse nel linguaggio di tutte le scienze.

Infine, nel 1873, Charles Hermite dimostrò che il numero «e» è anche trascendente, come il più famoso π , cioè che non può essere soluzione di un'equazione algebrica a coefficienti interi.

La presenza di «e» in moltissime formule matematiche che descrivono fenomeni fisici deriva dal fatto di essere la base della funzione esponenziale $y = e^t$, (l'inversa della funzione logaritmica), che cresce molto rapidamente al crescere di t , l'unica funzione che è uguale al suo tasso di variazione, cioè alla sua derivata, rispetto a t . In simboli $d/dt(e^t) = e^t$.

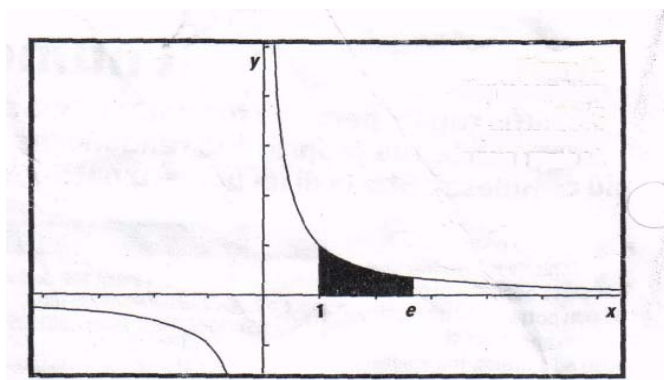


Molti fenomeni in natura seguono questa legge; per esempio il modello, anche se molto semplificato, di diffusione di una malattia in una popolazione animale: se indichiamo con p la percentuale di popolazione ammalata al tempo t , il tasso di infezione, cioè l'aumento rispetto al tempo degli individui ammalati, è proporzionale alla percentuale degli ammalati. La legge si esprime allora con la formula: $dp/dt = kp$, con k costante, un'equazione differenziale la cui incognita è la funzione p .

La soluzione è la funzione $p = p_0 e^{kt}$ dove p_0 è la percentuale di popolazione infettata al momento iniziale $t = 0$. L'andamento della malattia segue quindi una legge esponenziale e andrà pertanto diffondendosi sempre più rapidamente.

Compagno pi greco

Il numero «e» viene spesso confrontato con π , che ha fatto versare molto più inchiostro, essendo la sua storia molto più antica. Dal punto di vista geometrico, mentre π è il numero del cerchio, poiché nel cerchio è la sua origine, «e» è considerato il numero dell'iperbole [figura 2]. Infatti l'area della superficie compresa tra l'iperbole equilatera di equazione $y = 1/x$, l'asse delle x , le rette $x = 1$ e $x = e$, è uguale a 1.



π ed e sono inoltre legati dalla formula

$$e^{i\pi} + 1 = 0,$$

considerata molto bella nella sua semplicità perché comprende i numeri più significativi della matematica.