

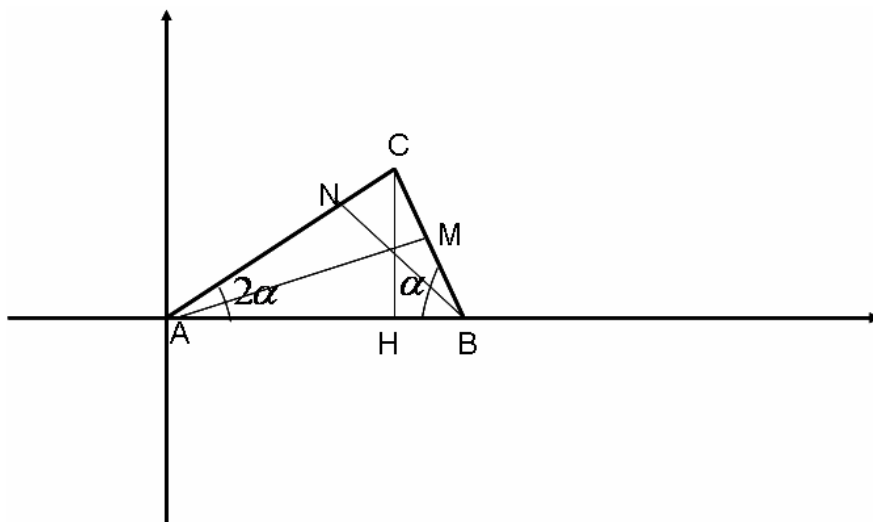
PROBLEMA 1

Si considerino i triangoli la cui base è $AB = 1$ e il cui vertice C varia in modo che l'angolo \widehat{CAB} si mantenga doppio dell'angolo \widehat{ABC} .

1. Riferito il piano ad un conveniente sistema di coordinate, si determini l'equazione del luogo geometrico γ descritto da C .
2. Si rappresenti γ , tenendo conto, ovviamente, delle prescritte condizioni geometriche.
3. Si determini l'ampiezza dell'angolo \widehat{ABC} che rende massima la somma dei quadrati delle altezze relative ai lati AC e BC e, con l'aiuto di una calcolatrice, se ne dia un valore approssimato in gradi e primi (sessagesimali).
4. Si provi che se $\widehat{ABC} = 36^\circ$ allora è $AC = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

SOLUZIONE

Consideriamo la seguente figura:



1)

Il punto C ha coordinate generiche $C = (x, y)$. Ma il triangolo AHC è rettangolo per cui $y = x \tan(2\alpha)$.

Ora applicando il teorema dei seni al triangolo ABC si ha:

$$\begin{aligned} \frac{AC}{\sin(\alpha)} &= \frac{AB}{\sin(\pi - 3\alpha)} = \frac{1}{\sin(3\alpha)} \rightarrow \\ AC &= \frac{\sin(\alpha)}{\sin(3\alpha)} = \frac{\sin(\alpha)}{\sin(2\alpha + \alpha)} = \\ &= \frac{\sin(\alpha)}{\sin(2\alpha)\cos(\alpha) + \cos(2\alpha)\sin(\alpha)} = \\ &= \frac{\sin(\alpha)}{\sin(\alpha)[2\cos^2(\alpha) + \cos(2\alpha)]} = \frac{1}{[4\cos^2(\alpha) - 1]} = \frac{1}{[2\cos(2\alpha) + 1]} \end{aligned}$$

Ma vale anche che:

$$AH = x = AC \cos(2\alpha) = \frac{\cos(2\alpha)}{[2 \cos(2\alpha) + 1]} \rightarrow \cos(2\alpha) = \frac{x}{1-2x}$$

Quindi abbiamo due condizioni:

$$\begin{cases} \cos(2\alpha) = \frac{x}{1-2x} \\ \sin(2\alpha) = \frac{y}{x} \cos(2\alpha) = \frac{y}{1-2x} \end{cases}$$

Ricordando la relazione fondamentale

$$\begin{aligned} \sin^2(2\alpha) + \cos^2(2\alpha) &= 1 \rightarrow \\ \left(\frac{y}{1-2x}\right)^2 + \left(\frac{x}{1-2x}\right)^2 &= 1 \rightarrow \\ x^2 + y^2 - (1-2x)^2 &= 0 \rightarrow \\ y^2 - 3x^2 + 4x - 1 &= 0 \end{aligned}$$

Per cui si ha:

$$\gamma: y^2 - 3x^2 + 4x - 1 = 0$$

Per capire di che curva si tratta riscriviamola in questo modo:

$$\begin{aligned} y^2 - 3x^2 + 4x - 1 = 0 &\Leftrightarrow y^2 - (3x^2 - 4x + 1) = 0 \Leftrightarrow y^2 - 3\left(x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{1}{3}\right) = 0 \Leftrightarrow \\ y^2 - 3\left(x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{3} - \frac{1}{3} &= 0 \Leftrightarrow y^2 - 3\left(x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{4}{9}\right) + \frac{1}{3} = 0 \Leftrightarrow \\ \frac{\left(x - \frac{2}{3}\right)^2}{\frac{1}{9}} - \frac{y^2}{\frac{1}{3}} &= 1 \end{aligned}$$

Ora se effettuiamo una traslazione lungo l'asse delle ascisse cioè effettuiamo la trasformazione

$x'' = x - \frac{2}{3}$ la curva diventa:

$$\gamma: \frac{\left(x''\right)^2}{\frac{1}{9}} - \frac{y^2}{\frac{1}{3}} = 1 \rightarrow \gamma'': \frac{\left(x''\right)^2}{\frac{1}{9}} - \frac{y^2}{\frac{1}{3}} = 1$$

cioè otteniamo la classica iperbole con asintoti $y = \pm\sqrt{3}$. Per cui la nostra curva è una iperbole traslata con asintoti $y = \pm\sqrt{3}\left(x - \frac{2}{3}\right)$

2)

Il problema impone però delle limitazioni geometriche.

Innanzitutto deve essere $0^\circ \leq \alpha \leq 60^\circ$. Ora poiché il coseno in questo intervallo è decrescente allora

$$0^\circ \leq \alpha \leq 60^\circ \Leftrightarrow 0 \leq 2\alpha \leq 120^\circ \rightarrow \cos(120^\circ) \leq \cos(2\alpha) \leq \cos(0^\circ) \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq \cos(2\alpha) \leq 1$$

Ma

$$\begin{aligned} \cos(2\alpha) = \frac{x}{1-2x} \rightarrow -\frac{1}{2} \leq \frac{x}{1-2x} \leq 1 \rightarrow \\ \begin{cases} \frac{x}{1-2x} \leq 1 \\ \frac{x}{1-2x} \geq -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3x-1}{1-2x} \leq 0 \\ \frac{1}{1-2x} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq \frac{1}{3}, x > \frac{1}{2} \\ x < \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \\ x \leq \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Inoltre per come introdotto il sistema di riferimento deve aversi $y \geq 0$, quindi il nostro problema va discusso per

$$\begin{cases} x \leq \frac{1}{3} \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Ricaviamo ora la funzione $y = f(x)$ dalla curva $\gamma: y^2 - 3x^2 + 4x - 1 = 0$.

Si ha:

$$y = \pm\sqrt{3x^2 - 4x + 1}$$

Ma con la limitazione $y \geq 0$ la soluzione da prendere è quella positiva per cui la nostra funzione è

$$y = \sqrt{3x^2 - 4x + 1}$$

Studiamo allora la funzione $y = \sqrt{3x^2 - 4x + 1}$ con la limitazione $x \leq \frac{1}{3}$

Dominio: $3x^2 - 4x + 1 = (3x - 1)(x - 1) \geq 0 \rightarrow x \geq 1 \cup x \leq \frac{1}{3}$ che con la limitazione $x \leq \frac{1}{3}$ impone

come dominio $\left(-\infty, \frac{1}{3}\right]$;

Intersezioni asse ascisse: $y = \sqrt{3x^2 - 4x + 1} = 0 \rightarrow 3x^2 - 4x + 1 = 0 \rightarrow x = 1, x = \frac{1}{3}$ e con la

limitazione l'unica intersezione è $x = \frac{1}{3}$;

Intersezioni asse delle ordinate: $x = 0 \rightarrow y = 1$;

Positività: nel dominio la funzione è sempre positiva visto che si tratta di una funzione radice;

Asintoti verticali: non ce ne sono;

Asintoti orizzontali: non ce ne sono. Infatti $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{3x^2 - 4x + 1} = +\infty$;

Asintoti obliqui:

$$y = mx + q$$

$$m = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{3x^2 - 4x + 1}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x| \sqrt{3 - \frac{4}{x} + \frac{1}{x^2}}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x \sqrt{3 - \frac{4}{x} + \frac{1}{x^2}}}{x} = -\sqrt{3}$$

$$q = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\sqrt{3x^2 - 4x + 1} + x\sqrt{3} \right] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{-4x + 1}{\sqrt{3x^2 - 4x + 1} - x\sqrt{3}} \right] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{-4x + 1}{-x \sqrt{3 - \frac{4}{x} + \frac{1}{x^2}} - x\sqrt{3}} \right] = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

per cui l'asintoto è unico ed è pari a $y = -\sqrt{3}x + \frac{2}{\sqrt{3}}$ come già anticipato. L'altro asintoto non lo

abbiamo calcolato e ritrovato perché abbiamo la limitazione $x \leq \frac{1}{3}$

Crescenza e decrescenza:.

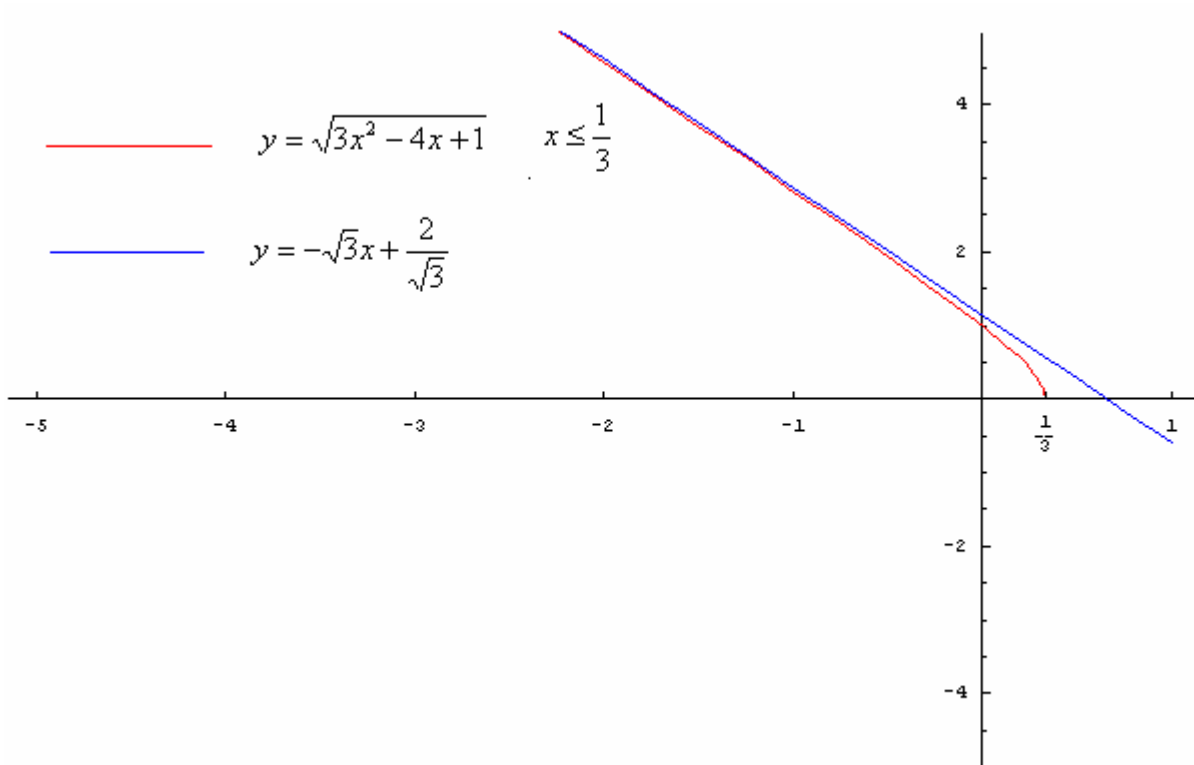
Calcoliamo le derivate:

$$y'(x) = \frac{3x-2}{\sqrt{3x^2-4x+1}} > 0 \rightarrow x \in (1, +\infty) \text{ tenendo conto del dominio di definizione.}$$

Per cui la funzione è crescente nell' intervallo $x \in (1, +\infty)$ e decrescente altrove. Poiché abbiamo la limitazione geometrica $x \leq \frac{1}{3}$ allora la nostra funzione è sempre decrescente.

Inoltre essa non è derivabile in $x = \frac{1}{3}$ perché $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{3}^-} y'(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{3}^+} y'(x) = -\infty$.

Il grafico è sotto presentato:



Tale grafico poteva essere ricavato anche partendo dal grafico dell'iperbole traslata e

considerandone il ramo che soddisfa alle limitazioni $\begin{cases} x \leq \frac{1}{3} \\ y \geq 0 \end{cases}$.

3)

Considerando la figura di partenza si ha:

$$AM = AB \sin(\alpha) = \sin(\alpha)$$

$$BN = AB \sin(2\alpha) = \sin(2\alpha)$$

Per cui la funzione da massimizzare è $S(\alpha) = \sin^2(\alpha) + \sin^2(2\alpha)$.

Calcoliamo le derivate:

$$S'(\alpha) = 2 \sin(\alpha) \cos(\alpha) + 4 \sin(2\alpha) \cos(2\alpha) = \sin(2\alpha)[1 + 4 \cos(2\alpha)]$$

$$S''(\alpha) = 2 \cos(2\alpha) + 8 \cos(4\alpha)$$

Il segno lo si discute sempre discutendo singolarmente ogni fattore, ricordando la limitazione $0^\circ \leq \alpha \leq 60^\circ$:

$$\sin(2\alpha) > 0 \rightarrow k\pi < \alpha < \frac{\pi}{2} + k\pi$$

$$\cos(2\alpha) > -\frac{1}{4} \rightarrow k\pi < \alpha < \frac{1}{2} \arccos\left(-\frac{1}{4}\right) + k\pi \cup \left(\pi - \frac{1}{2} \arccos\left(-\frac{1}{4}\right)\right) + k\pi < \alpha < \pi + k\pi$$

e limitandoci in $0^\circ \leq \alpha \leq 60^\circ$ si ha:

$$S'(\alpha) > 0 \rightarrow 0 < \alpha < \frac{1}{2} \arccos\left(-\frac{1}{4}\right)$$

$$S''\left(\frac{1}{2} \arccos\left(-\frac{1}{4}\right)\right) < 0$$

per cui il valore che massimizza la funzione $S(\alpha) = \sin^2(\alpha) + \sin^2(2\alpha)$ è

$$\alpha = \frac{1}{2} \arccos\left(-\frac{1}{4}\right) \cong 52^\circ 13'$$

4)

Per dimostrare l'ultima questione ci serviamo di relazioni trigonometriche fondamentali:

$$\sin(72^\circ) = 2 \sin(36^\circ) \cos(36^\circ)$$

$$\sin(36^\circ) = 2 \sin(18^\circ) \cos(18^\circ)$$

$$\cos(36^\circ) = 1 - 2 \sin^2(18^\circ)$$

$$\sin(72^\circ) = \sin(90^\circ - 18^\circ) = \cos(18^\circ)$$

Da queste ricaviamo:

$$4 \sin(18^\circ) \cos(18^\circ) [1 - 2 \sin^2(18^\circ)] = \cos(18^\circ) \rightarrow 4 \sin(18^\circ) [1 - 2 \sin^2(18^\circ)] = 1$$

Poniamo ora $x = \sin(18^\circ)$, allora:

$$4 \sin(18^\circ) [1 - 2 \sin^2(18^\circ)] = 1 \rightarrow 4x(1 - 2x^2) = 1 \rightarrow 8x^3 - 4x + 1 = 0 \rightarrow$$

$$(2x - 1)(4x^2 + 2x - 1) = 0 \rightarrow x = \frac{1}{2}, x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{4}$$

Ora la soluzione $x = \frac{1}{2}$ non è accettabile perché a 30° il seno vale $\frac{1}{2}$. Inoltre la soluzione

$x = \frac{-1 - \sqrt{5}}{4}$ va scartata perché riguarda un angolo che non si trova nel primo quadrante, in cui si

trova invece 18° . Per cui in conclusione si ha

$$\sin(18^\circ) = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4}$$

Ora

$$\begin{aligned} AC &= \frac{1}{[4 \cos^2(36^\circ) - 1]} = \frac{1}{[4 \cos^2(2 \cdot 18^\circ) - 1]} = \frac{1}{[4(\cos^2(18^\circ) - \sin^2(18^\circ))^2 - 1]} = \\ &= \frac{1}{[4(1 - 2 \sin^2(18^\circ))^2 - 1]} = \frac{1}{\left[4 \left(1 - 2 \left(\frac{-1 + \sqrt{5}}{4}\right)^2\right)^2 - 1\right]} = \frac{1}{\left[4 \left(1 - \left(\frac{6 - 2\sqrt{5}}{8}\right)\right)^2 - 1\right]} = \\ &= \frac{1}{\left[4 \left(\frac{2 + 2\sqrt{5}}{8}\right)^2 - 1\right]} = \frac{1}{\left[\left(\frac{24 + 8\sqrt{5}}{16}\right) - 1\right]} = \frac{16}{8 + 8\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5} + 1} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \end{aligned}$$