QUESTIONARIO

1. Si spieghi in che cosa consista il problema della quadratura del cerchio e se, e in che senso, si tratti di un problema risolubile o meno.

Soluzione

Il problema della quadrature del cerchio consiste nel trovare con riga e compasso solamente un quadrato avente la stessa area di un dato cerchio. Questo equivale a costruire un quadrato di lato $l = \sqrt{\pi r^2} = r\sqrt{\pi}$. Ma questo non è possibile visto che, come ha dimostrato Lindermann nel 1882, il numero π (e quindi la sua radice) è un numero trascendente.

2. La regione del piano racchiusa tra il grafico della funzione $y = \ln x$ e l'asse x, con $1 \leq x \leq e$, è la base di un solido S le cui sezioni, ottenute tagliando S con piani perpendicolari all'asse x, sono tutte rettangoli aventi l'altezza tripla della base. Si calcoli il volume di S e se ne dia un valore approssimato a meno di 10^{-2}.

Soluzione

Il rettangolo avrà altezza triplo della base e quindi pari a $3\ln(x)$, per cui la sua area sarà $A = 3\ln^2(x)$, da cui il suo volume sarà:

$$V = \int_1^e 3\ln^2(x)dx = 3\int_1^e \ln^2(x)dx$$

Ora applicando due volte consecutive il teorema di integrazione per parti si ha:

$$\int \ln^2(x)dx = x\ln^2(x) - 2\int \ln(x)dx = x\ln^2(x) - 2x\ln(x) + \int 2dx = x\ln^2(x) - 2x\ln(x) + 2x + k$$

Per cui

$$V = \int_1^e 3\ln^2(x)dx = 3\int_1^e \ln^2(x)dx = 3\left[x\ln^2(x) - 2x\ln(x) + 2x\right]_1^e = 3[e - 2e + 2e - 2] = 3e - 6$$

Un valore approssimato con due cifre significative è:

$$V \approx 3(2.71) - 6 \approx 2.13$$

3. Si dimostri che l'insieme delle *omotetie* con centro O fissato è un *gruppo*.

Soluzione

Un'omotetia di centro O fissato non è altro che un'applicazione T_λ che dato un punto P distante da O di una quantità *d*, manda questo stesso punto in un punto Q giacente sulla stessa semiretta OP distante λd dal centro O.
L'insieme delle omotetie di centro O e $\lambda > 0$ è un gruppo. Infatti gode delle seguenti proprietà:

- Associativa:

$$\forall \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 > 0, T_{\lambda_1}\left(T_{\lambda_2} * T_{\lambda_3}\right) = \left(T_{\lambda_1} * T_{\lambda_2}\right)T_{\lambda_3}$$

Infatti la trasformazione $T_{\lambda_1}\left(T_{\lambda_2} * T_{\lambda_3}\right)$ porterà il punto P distante d dal centro O prima ad una distanza $\lambda_1\lambda_2 d$ e poi ad una distanza $\lambda_1\lambda_2\lambda_3 d$ in un punto Q giacente sulla stessa semiretta OP. Analogamente dicasi per la trasformazione $\left(T_{\lambda_1} * T_{\lambda_2}\right)T$.

- Esistenza elemento neutro:

Tale elemento è $\lambda = 1$, infatti dato $\mu > 0$ si ha

$$T_1 T_\mu = T_\mu T_1 = T_\mu$$

In quanto la trasformazione T_1 manda il punto P in se stesso.

- Esistenza dell'inversa.

L'inversa di T_λ è la trasformazione $T_{\lambda^{-1}}$, infatti $T_\lambda T_{\lambda^{-1}} = T_{\lambda^{-1}} T_\lambda = Id$ con I l'applicazione identica, dal momento che la trasformazione T_λ porta P ad una distanza λd dal centro O e la trasformazione $T_{\lambda^{-1}}$ lo porta ad una distanza $(\lambda d)\lambda^{-1} = d$.

In particolare si dimostra che questo gruppo è abeliano.

Un ulteriore modo per dimostrare quanto appena dimostrato è notare che la omotetia di centro O fissato (supponiamo di stare nel piano e di prendere O=(0,0) senza ledere la generalità della dimostrazione) manda un punto P del piano di coordinate (x, y) nel punto $Q = (x', y') = (\lambda x, \lambda y)$ cioè effettua la trasformazione $\begin{cases} x' = \lambda x \\ y' = \lambda y \end{cases}$. Questa trasformazione può essere messa in forma matriciale in questo modo:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

In cui la matrice di trasformazione è $T = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$ ed è diagonale.

Ora il prodotto di due matrici diagonali è ancora una matrice diagonale, la matrice identità $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ è l'elemento neutro e $\forall \lambda \neq 0, T^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\lambda} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda} \end{bmatrix}$. Abbiamo così di nuovo dimostrato che l'insieme delle omotetie di centro fissato O è un gruppo.

4. Si consideri la funzione:

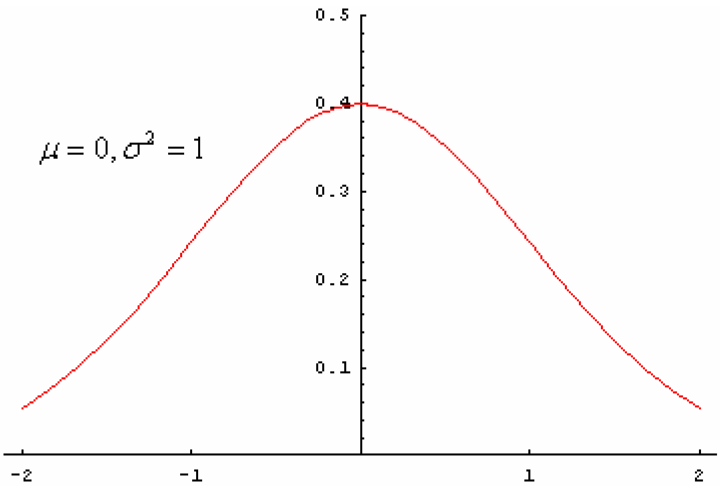
$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Se ne spieghi l'importanza nelle applicazioni della matematica illustrando il significato di μ, σ, σ^2 e come tali parametri influenzino il grafico di *f(x)*.

Soluzione

La funzione presentata non è altro che una densità di probabilità notissima; infatti essa rappresenta la densità di probabilità di una variabile aleatoria gaussiana o normale di media μ e varianza σ^2.

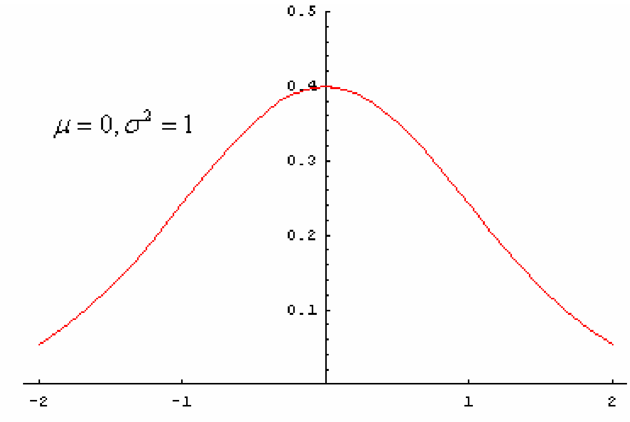
Essendo una densità di probabilità essa avrà area sottesa nulla cioè $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}}{\sigma\sqrt{2\pi}} dx = 1$. Questa funzione viene più volte riferita come campana di Gauss vista la sua forma a campana:

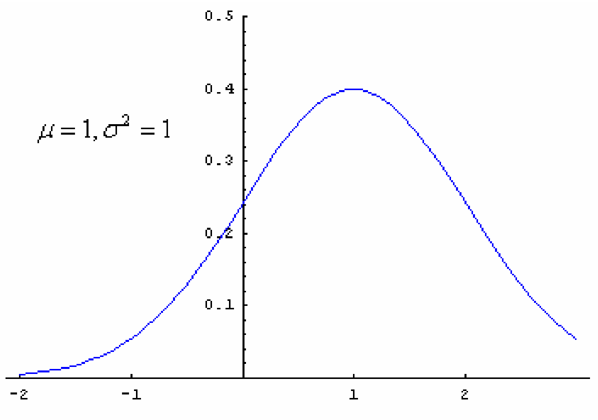


Una tale funzione, visto il suo vastissimo uso è gabellata numericamente. In particolare esistono tabelle che $\forall x \in R$ contengono i valori dell'integrale $Q(x) = \int_{x}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}}{\sigma\sqrt{2\pi}} dx$. Questo integrale non è altro che la probabilità che una variabile aleatoria gaussiana $X = N(\mu, \sigma^2)$ assuma valori maggiori di *x*, cioè $Q(x) = \int_{x}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}}{\sigma\sqrt{2\pi}} dx = \Pr(X \geq x)$.

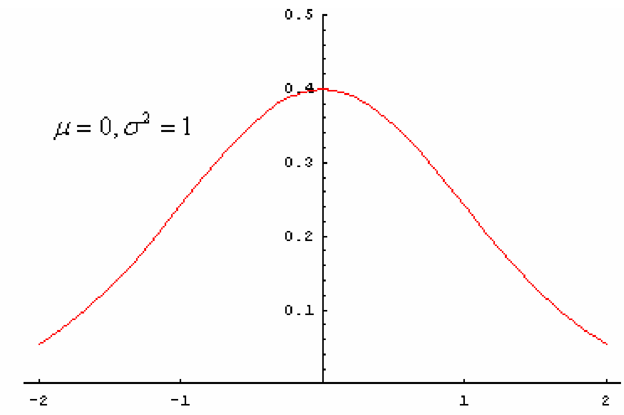
Una tale densità di probabilità presenta come parametri caratteristici la media μ, la varianza σ^2 e la deviazione standard σ definita come la radice quadrata della varianza. Discutiamo ora il significato della media μ e della varianza al variare dell'una e fissata l'altra.

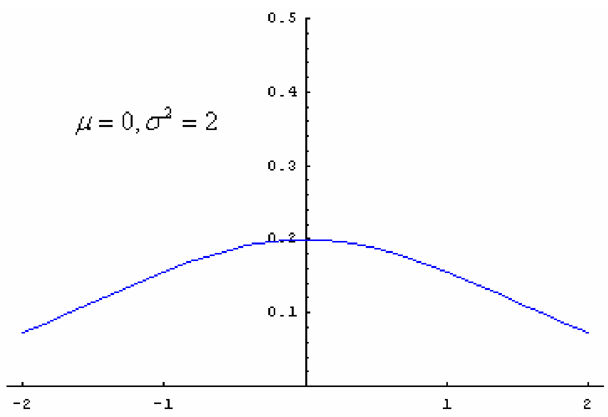
- Fissata la varianza σ^2, al variare della media μ la forma della campana non muta, ma trasla lungo l'asse delle ascisse. Infatti $x = \mu$ è asse di simmetria per la densità ed in corrispondenza di $x = \mu$ la densità assume valore massimo pari a $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$.





- Fissata la media μ, al variare della varianza σ^2, la densità cambia forma. Infatti al decrescere della varianza σ^2 (e quindi di σ) la campana si restringe sempre più, il massimo raggiunto per $x = \mu$ aumenta, e la campana tende a diventare una delta di Dirac centrata in $x = \mu$ quando $\sigma^2 \to 0$. Viceversa al crescere di σ^2 (e quindi di σ) la campana si allarga sempre più, il suo massimo diminuisce, fino a che la densità tende a coincidere con l'asse delle ascisse se $\sigma^2 \to \infty$. Infatti in tal caso il valore massimo è nullo. Questo ci fa pensare che la deviazione standard e la varianza siano degli indici di come si distribuiscono i valori intorno alla media.

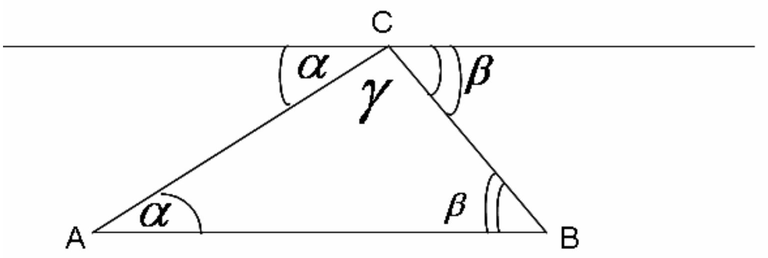




5. Si consideri il teorema: «*la somma degli angoli interni di un triangolo è un angolo piatto*» e si spieghi perché esso non è valido in un contesto di geometria *non-euclidea*. Quali le formulazioni nella geometria *iperbolica* e in quella *ellittica*? Si accompagni la spiegazione con il disegno.

Soluzione

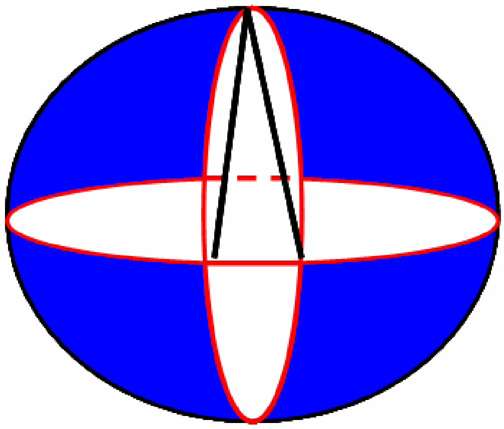
Nella geometria euclidea, l'asserto è dimostrabile sfruttando la proprietà che per un punto passa una sola retta parallela ad una retta data:



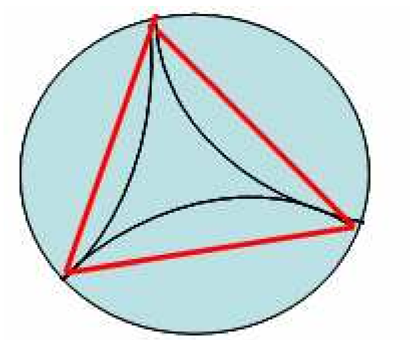
Per i teoremi sull'uguaglianza di angoli alterni interni per rette parallele, si ha l'uguaglianza degli angoli in figura da cui $\alpha + \beta + \gamma = 180°$.

In un contesto non euclideo si possono avere due possibilità:

- Geometria ellittica: la parallela dal vertice non esiste e la somma degli angoli interni è maggiore dell'angolo piatto, ed i lati non sono segmenti ma archi di circonferenza:



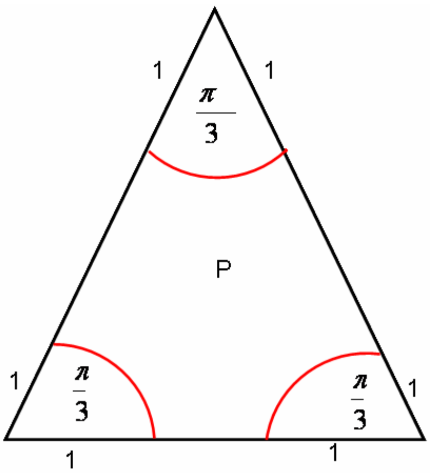
- Geometria iperbolica: la parallela dal vertice esiste e non è unica, e la somma degli angoli interni è minore dell'angolo piatto, ed i lati non sono segmenti ma archi di iperboli perpendicolari al cerchio esterno:



6. Si scelga a caso un punto P all'interno di un triangolo equilatero il cui lato ha lunghezza 3. Si determini la probabilità che la distanza di P da ogni vertice sia maggiore di 1.

Soluzione

La probabilità in questione possiamo calcolarla, vista la scelta casuale del punto P, come rapporto tra l'area della regione in cui in punto P deve stare per essere distante più di 1 da ogni vertice e l'area totale del triangolo equilatero. L'area del triangolo equilatero è $\frac{3^2\sqrt{3}}{4}=\frac{9\sqrt{3}}{4}$. Per calcolare l'area di interesse consideriamo la figura seguente:



Il punto P non deve trovarsi in uno dei tre settori circolari di raggio 1 ed apertura angolare $\frac{\pi}{3}$. L'area coperta da ogni settore angolare suddetto è $\frac{\pi}{6}$, per cui l'area coperta da tutti e tre settori è $3\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\pi}{2}$. La probabilità richiesta è allora:

$$\Pr\{d_P > 1 \,\text{da ogni vertice}\} = \frac{\frac{9\sqrt{3}}{4}-\frac{\pi}{2}}{\frac{9\sqrt{3}}{4}} = \frac{9\sqrt{3}-2\pi}{9\sqrt{3}} \cong 0.597$$

7. Si determini l'equazione del luogo geometrico dei centri delle circonferenze del piano tangenti alla parabola $y=x^2+1$ nel punto (1, 2).

Soluzione

La parabola e la circonferenza in esame sono tangenti nel punto (1,2) per cui hanno la retta tangente in (1,2) comune. Il segmento contenente il centro della circonferenza è perpendicolare alla retta tangente in (1,2), per cui il luogo dei punti in questione non è altro che la retta normale nel punto (1,2) cioè la retta perpendicolare alla retta tangente in (1,2).

La retta tangente alla parabola in (1,2) ha coefficiente angolare $m = f'(1) = 2$ per cui la normale avrà coefficiente angolare $m' = -\frac{1}{2}$ per cui il luogo richiesto è

$$\gamma : y - 2 = -\frac{1}{2}(x-1) \rightarrow \gamma : x + 2y - 5 = 0$$

8. A *Leonardo Eulero* (1707-1783), di cui quest'anno ricorre il terzo centenario della nascita, si deve il seguente problema: «Tre gentiluomini giocano insieme: nella prima partita il primo perde, a favore degli altri due, tanto denaro quanto ne possiede ciascuno di loro. Nella successiva, il secondo gentiluomo perde a favore di ciascuno degli altri due tanto denaro quanto essi già ne possiedono. Da ultimo, nella terza partita, il primo e il secondo guadagnano ciascuno dal terzo gentiluomo tanto denaro quanto ne avevano prima. A questo punto smettono e trovano che ciascuno ha la stessa somma, cioè 24 luigi. Si domanda con quanto denaro ciascuno si sedette a giocare».

Soluzione

Chiamiamo i tre gentiluomini Nicola, Pasquale e Fabrizio. La situazione iniziale e dopo le giocate effettuate è evidenziata nella tabella sottostante:

	Pasquale	Nicola	Fabrizio
Soldi iniziali	A	B	C
Soldi dopo 1^a giocata	A-B-C	2B	2C
Soldi dopo 2^a giocata	2(A-B-C)	2B-(A-B-C)-2C=-A+3B-C	4C
Soldi dopo 3^a giocata	4(A-B-C)	2(-A+3B-C)	4C-2(A-B-C)- (-A+3B-C)= -A-B+7C

Va risolto allora il sistema:

$$\begin{cases} 4(A-B-C)=24 \\ 2(-A+3B-C)=24 \\ -A-B+7C=24 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A-B-C=6 \\ -A+3B-C=12 \\ -A-B+7C=24 \end{cases} \Rightarrow$$

$$A = \frac{\begin{vmatrix} 6 & -1 & -1 \\ 12 & 3 & -1 \\ 24 & -1 & 7 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 7 \end{vmatrix}} = \frac{126+24+12+72+84-6}{21-1-1-3-7-1} = \frac{312}{8} = 39$$

$$B = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 6 & -1 \\ -1 & 12 & -1 \\ -1 & 24 & 7 \end{vmatrix}}{8} = \frac{84+6+24-12+42+24}{8} = \frac{168}{8} = 21$$

$$C = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 6 \\ -1 & 3 & 12 \\ -1 & -1 & 24 \end{vmatrix}}{8} = \frac{72+12+6+18-24+12}{8} = \frac{96}{8} = 12$$

9. Si dimostri che l'equazione $2x^3 - 3x^2 + 6x + 6 = 0$ ha un'unica radice reale e si trovi il suo valore con una precisione di due cifre significative.

Soluzione

La funzione $y = 2x^3 - 3x^2 + 6x + 6$ è una funzione definita, continua e derivabile in tutto R.
Inoltre $\lim_{x\to+\infty} y = +\infty, \lim_{x\to-\infty} y = -\infty$.
La sua derivata è $y' = 6(x^2 - x + 1) > 0 \ \forall x \in R$, per cui la nostra funzione è sempre crescente. Le considerazioni sui limiti a $\pm\infty$ e sulla crescenza, ci portano a dire che $\exists! \ \bar{x} \in R \ : \ f(\bar{x}) = 0$.
Tale valore lo calcoliamo attraverso il metodo di bisezione.
Partiamo dall'intervallo $[-1,0]$. Si ha:

$y(-1) = -5 < 0, y(0) = 6 > 0$. Ora proseguendo si ha:

$y\left(-\frac{1}{2}\right) = 2 > 0$ per cui prendiamo in considerazione l'intervallo $\left[-1,-\frac{1}{2}\right]$

$y\left(-\frac{3}{4}\right) = -\frac{33}{32} < 0$ per cui prendiamo in considerazione l'intervallo $\left[-\frac{3}{4},-\frac{1}{2}\right]$

$y\left(-\frac{5}{8}\right) = \frac{151}{256} > 0$ per cui prendiamo in considerazione l'intervallo $\left[-\frac{3}{4},-\frac{5}{8}\right]$

$y\left(-\frac{11}{16}\right) = -\frac{395}{2048} < 0$ per cui prendiamo in considerazione l'intervallo $\left[-\frac{11}{16},-\frac{5}{8}\right]$

$y\left(-\frac{11}{16}\right) = -\frac{395}{2048} < 0$ per cui prendiamo in considerazione l'intervallo $\left[-\frac{11}{16},-\frac{5}{8}\right]$

$y\left(-\frac{21}{32}\right) = \frac{3343}{16384} > 0$ per cui prendiamo in considerazione l'intervallo $\left[-\frac{11}{16},-\frac{21}{32}\right]$

$y\left(-\frac{86}{128}\right) = \frac{16592}{2097152} > 0$ per cui lo zero si troverà nell'intervallo $\left[-\frac{11}{16},-\frac{86}{128}\right]$.

Ma

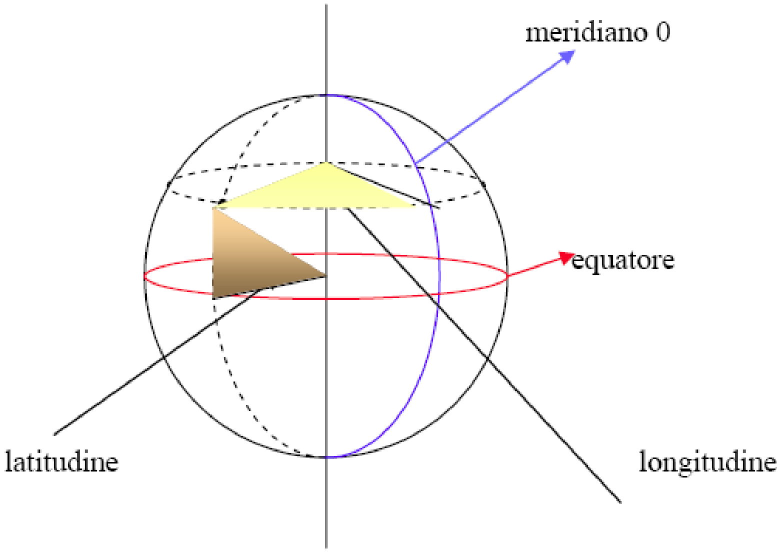
$y\left(-\frac{87}{128}\right) = -\frac{193038}{2097152} < 0$ per cui lo zero si troverà nell'intervallo $\left[-\frac{87}{128},-\frac{86}{128}\right] \cong [-0.679,-0.671]$

Per cui lo zero ha come valore numerico con due cifre significative $\bar{x} = -0.67$.

10. Per orientarsi sulla Terra si fa riferimento a *meridiani* e a *paralleli*, a *latitudini* e a *longitudini*. Supponendo che la Terra sia una sfera S e che l'asse di rotazione terrestre sia una retta r passante per il centro di S, come si può procedere per definire in termini geometrici meridiani e paralleli e introdurre un sistema di coordinate geografiche terrestri?

Soluzione

Nel sistema di coordinate terrestri si sceglie come piano fondamentale quello dell'equatore, la direzione fondamentale l'asse di rotazione della Terra. Si suppone che la superficie terrestre sia di forma sferica.
Un qualunque piano che contiene l'asse terrestre (piano meridiano), determina sulla superficie terrestre un cerchio massimo passante per i poli, il circolo meridiano.
Per **meridiano** geografico si intende una semicirconferenza compresa tra i due poli. Ogni meridiano ha un suo antimeridiano. I meridiani sono tutti uguali fra loro.
I **paralleli** sono i circoli formati dall'intersezione tra un qualunque piano parallelo all'equatore e la superficie terrestre. I paralleli sono tanto più piccoli quanto più sono distanti dall'equatore.
Paralleli e meridiani formano un reticolato che permette di identificare la posizione di un qualsiasi punto della superficie terrestre. Per individuare un punto si deve indicare il parallelo e il meridiano che passano per tale punto.
Si fissa convenzionalmente come meridiano fondamentale quello passante per l'Osservatorio astronomico di Greenwich, nei pressi di Londra.
La **longitudine** geografica è la distanza angolare di un punto dal meridiano fondamentale, misurata sull'arco di parallelo che passa per quel punto. Essa corrisponde all'angolo compreso tra il piano del meridiano del punto e il piano del meridiano fondamentale. Può essere EST o OVEST a seconda che il punto si trovi a EST o a OVEST del meridiano fondamentale, varia da 0° per i punti del meridiano fondamentale a 180°, è positiva per i punti a OVEST, negativa per i punti a EST del meridiano fondamentale.
La **latitudine** geografica è la distanza angolare di un punto dall'equatore misurata lungo il meridiano che passa per quel punto. Corrisponde all'angolo compreso tra la verticale del luogo e il piano dell'equatore, varia da +90° polo NOD a -90° polo SUD. I punti lungo l'equatore hanno latitudine 0°.



http://www.vialattea.net/eratostene/gloss/coordinategeografiche.html
http://www.matematicamente.it/magazine/Matematicamente.it%20Magazine%20n.01.pdf