PROBLEMA 1

Sia a un numero reale maggiore di zero e sia g la funzione definita, per ogni $x \in R$, da: $g(x) = a^x + a^{-x}$.

1. Si dimostri che, se $a \neq 1$, g è strettamente crescente per $x > 0$ e strettamente decrescente per $x < 0$.
2. Posto $a = e$, si disegni il grafico della funzione $f(x) = e^x + e^{-x}$ e si disegni altresì il grafico della funzione $\frac{1}{f(x)}$.
3. Si calcoli $\int_0^t \frac{1}{f(x)} dx$; successivamente, se ne trovi il limite per $t \to \infty$ e si interpreti geometricamente il risultato.
4. Verificato che il risultato del limite di cui al punto precedente è $\frac{\pi}{4}$, si illustri una procedura numerica che consenta di approssimare tale valore.

SOLUZIONE

1)
La funzione $g(x) = a^x + a^{-x}$, $\forall a \in (0,1) \cup (1,+\infty)$ e $\forall x \in R$ è una funzione pari, continua, derivabile e sempre positiva, che non interseca mai l'asse delle ascisse, interseca quello delle ordinate in $(0,2)$ e che non presenta asintoti, né verticali, né orizzontali, né obliqui .
Gli asintoti verticali non si presentano visto che il dominio è l'intero asse reale; gli asintoti orizzontali nemmeno esistono perché $\lim_{x \to \pm\infty} \left[a^x + a^{-x}\right] = +\infty, \forall a \neq 1$. Gli asintoti obliqui nemmeno esistono perché $\lim_{x \to \pm\infty} \frac{\left[a^x + a^{-x}\right]}{x} \overset{H}{=} \lim_{x \to \pm\infty} \ln(a)\left[a^x - a^{-x}\right] = +\infty, \forall a \neq 1$.
Per la crescenza e decrescenza vanno distinti i due casi:

- $a \in (0,1)$;
- $a \in (1,+\infty)$,

Caso $a \in (0,1)$**:**

$$g'(x) = \ln(a)\left[a^x - a^{-x}\right]$$

In questo caso essendo $a \in (0,1)$ allora $\ln(a) < 0$, per cui

$$g'(x) = \ln(a)\left[a^x - a^{-x}\right] > 0 \to \left[a^x - a^{-x}\right] < 0 \to a^x < a^{-x}$$

Ora ricordando che nel caso di disequazioni esponenziali, se la base è un numero appartenente all'intervallo $(0,1)$, il verso della disequazione cambia allora si ha:

$$a^x < a^{-x} \Leftrightarrow x > -x \to x > 0$$

Quindi per $a \in (0,1)$ la funzione è strettamente crescente in $(0,+\infty)$ e strettamente decrescente in $(-\infty,0)$.

Caso $a \in (1,+\infty)$**:**

$$g'(x) = \ln(a)\left[a^x - a^{-x}\right]$$

In questo caso essendo $a \in (1,+\infty)$ allora $\ln(a) > 0$, per cui

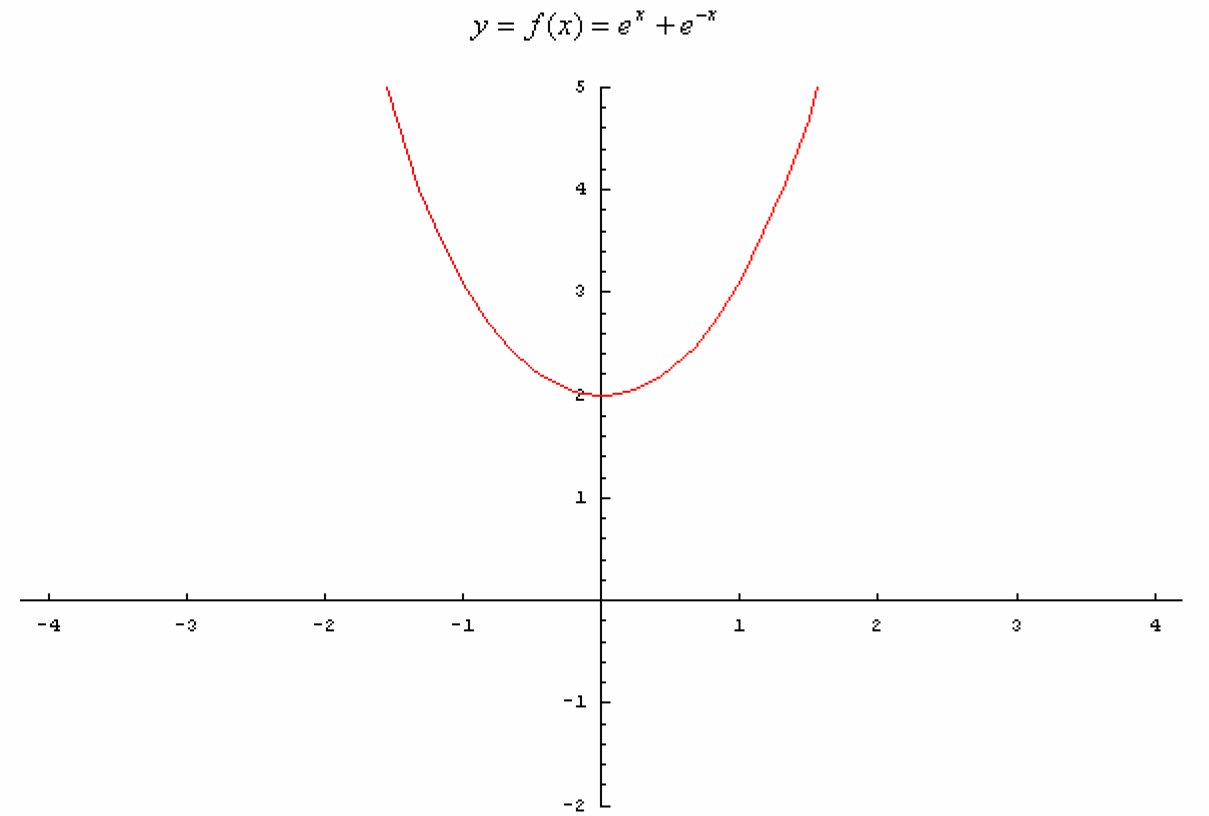
$$g'(x) = \ln(a)\left[a^x - a^{-x}\right] > 0 \rightarrow \left[a^x - a^{-x}\right] > 0 \rightarrow a^x > a^{-x}$$

Ora ricordando che nel caso di disequazioni esponenziali, se la base è un numero appartenente all'intervallo $(1,+\infty)$, il verso della disequazione non cambia allora si ha:

$$a^x > a^{-x} \Leftrightarrow x > -x \rightarrow x > 0$$

Quindi per $a \in (1,+\infty)$ la funzione è strettamente crescente in $(0,+\infty)$ e strettamente decrescente in $(-\infty,0)$.
Quindi abbiamo dimostrato che $\forall a \neq 1$ la funzione $g(x) = a^x + a^{-x}$ è strettamente crescente in $(0,+\infty)$ e strettamente decrescente in $(-\infty,0)$.
Inoltre $\forall a \neq 1, g''(x) = \ln^2(a) g(x) > 0 \forall x \in R$, per cui la funzione in esame presenta un minimo relativo ed assoluto nel punto $(0,2)$ e presenta concavità sempre rivolta verso l'alto.

2)
La funzione da discutere è $y = f(x) = e^x + e^{-x}$. Questa funzione appartiene alla casistica dei casi $a \in (1,+\infty)$. Le proprietà di una siffatta funzione sono state prima evidenziate, per cui il grafico è immediato ed è di seguito riportato:



Sia ora $h(x) = \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^x}{e^{2x} + 1}$

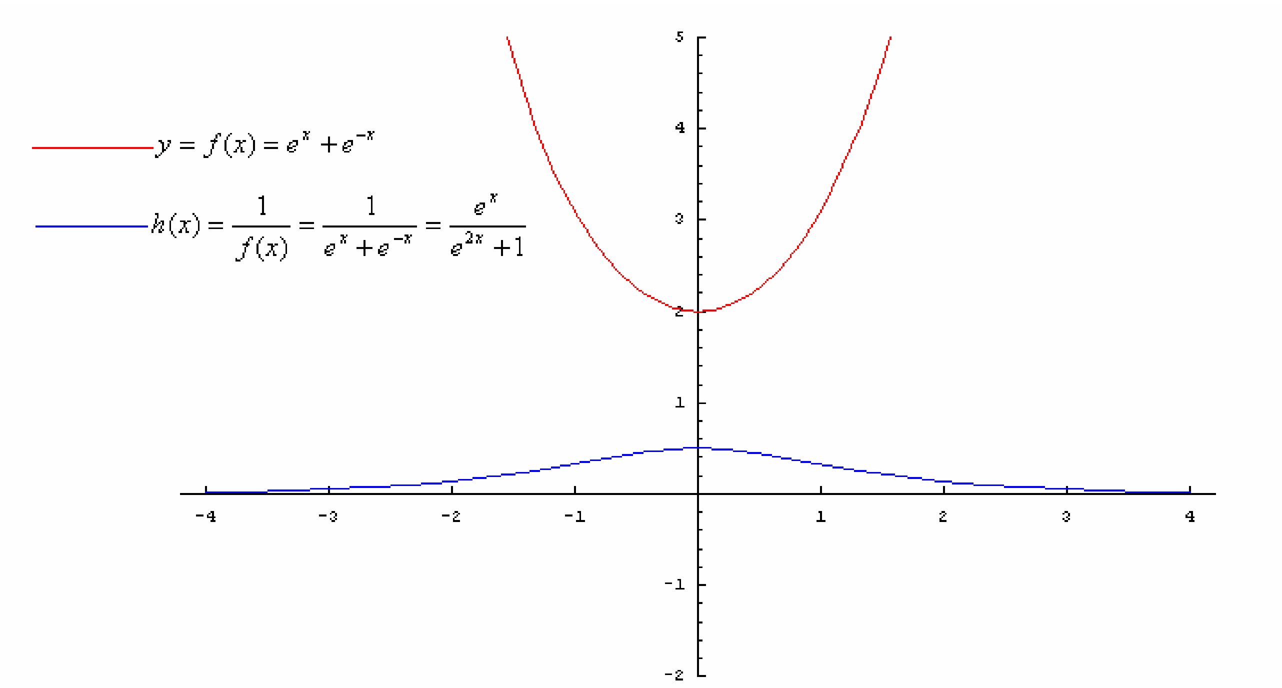
Questa funzione come la sua reciproca, è definita e continua su tutto l'asse reale, non interseca mai l'asse delle ascisse, interseca quello delle ordinate in $\left(0, \frac{1}{2}\right)$, è sempre positiva, non presenta asintoti, né verticali, né obliqui .
Gli asintoti verticali non si presentano visto che il dominio è l'intero asse reale; gli asintoti orizzontali esistono ed in realtà a destra e sinistra coincidono. Infatti $\lim_{x \to \pm\infty} \left[\frac{e^x}{e^{2x} + 1} \right] = 0$, per cui l'asintoto orizzontale destro e sinistro è la retta coincidente con l'asse delle ascisse, cioè $y = 0$.
Vediamo ora la crescenza e decrescenza:

$$h'(x) = -\frac{e^x - e^{-x}}{\left(e^x + e^{-x}\right)^2} > 0 \rightarrow e^x - e^{-x} < 0 \rightarrow e^x < e^{-x} \rightarrow x < -x \rightarrow x < 0$$

Cioè la funzione è strettamente crescente nell'intervallo $(-\infty, 0)$ e strettamente decrescente nell'intervallo $(0, +\infty)$ ed in $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ assume un massimo relativo ed assoluto.

Rappresentiamo i grafici di $y = f(x) = e^x + e^{-x}$ ed $h(x) = \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^{x}}{e^{2x} + 1}$ in un unico sistema di riferimento:

.



3)

Il calcolo dell'integrale $I(t)=\int_0^t \frac{e^x}{e^{2x}+1}dx$ lo si effettua tramite preventiva sostituzione:

$$\begin{aligned} &e^x = y \rightarrow dy = e^x dx \\ &x=0 \rightarrow y=1 \\ &x=t \rightarrow y=e^t \end{aligned}$$

Per cui

$$I(t)=\int_0^t \frac{e^x}{e^{2x}+1}dx=\int_1^{e^t}\frac{1}{y^2+1}dy=[\arctan(y)]_1^{e^t}=\arctan\left(e^t\right)-\arctan(1)=\arctan\left(e^t\right)-\frac{\pi}{4}$$

Ora

$$\lim_{t\rightarrow+\infty} I(t)=\lim_{t\rightarrow+\infty}\left[\arctan\left(e^t\right)-\frac{\pi}{4}\right]=\lim_{t\rightarrow+\infty}\arctan\left(e^t\right)-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}$$

E questo limite geometricamente rappresenta l 'area sottesa dalla curva $h(x)=\frac{e^x}{e^{2x}+1}$ nell'intervallo $(0,+\infty)$.

4)

Per il calcolo di $\frac{\pi}{4}$ si possono seguire differenti strade, che presentiamo di seguito.

- Utilizzo dello sviluppo di Taylor della funzione $y=\arctan(x)$:

secondo questo sviluppo possiamo scrivere la funzione $y=\arctan(x)$ in questo modo:

$$y=\arctan(x)=\sum_{k=0}^{+\infty}\left[(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{2k+1}\right]$$

Per cui

$$\arctan(1)=\frac{\pi}{4}=\sum_{k=0}^{+\infty}\left[\frac{(-1)^k}{2k+1}\right]=\lim_{h\rightarrow+\infty}\sum_{k=0}^{h}\left[\frac{(-1)^k}{2k+1}\right]$$

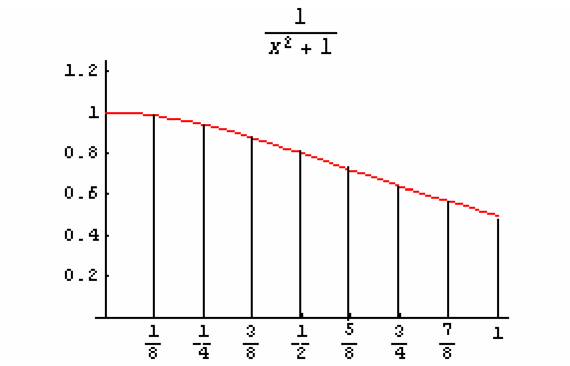
E cioè il valore lo si calcola come somma di valori numerici del tipo $\sum_{k=0}^{h}\left[\frac{(-1)^k}{2k+1}\right]$ al tendere di $h\rightarrow+\infty$.

- Utilizzo della relazione per cui $\frac{\pi}{4}=\int_0^1\frac{1}{1+x^2}dx$

Si può utilizzare l'approssimazione per rettangoli, che si traduce in:

$$\int_a^b f(x)dx \cong \frac{b-a}{n}\left[f(x_0) + f(x_1) + \cdots f(x_n) \right]$$

Nel nostro caso utilizzeremo n=8 rettangoli con intervalli uguali come evidenzia la figura sottostante:



Per cui

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx \cong \frac{1}{8}\left[\frac{1}{1+\left(\frac{1}{8}\right)^2} + \frac{1}{1+\left(\frac{1}{4}\right)^2} + \frac{1}{1+\left(\frac{3}{8}\right)^2} + \frac{1}{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2} + \frac{1}{1+\left(\frac{5}{8}\right)^2} \frac{1}{1+\left(\frac{3}{4}\right)^2} + \frac{1}{1+\left(\frac{7}{8}\right)^2} + \frac{1}{1+(1)^2} \right] \cong 0.7535$$

Valor che si avvicina sempre più al valore effettivo al crescere degli intervalli considerati.

- Procedura numerica al calcolatore.

Dal calcolo fatto in precedenza sappiamo che $I(t) = \int_0^t \frac{e^x}{e^{2x}+1}dx = \arctan(e^t) - \frac{\pi}{4}$. L'errore che si può commettere approssimando il valore di $\frac{\pi}{4}$ con l'integrale $I(t) = \int_0^t \frac{e^x}{e^{2x}+1}dx = \arctan(e^t) - \frac{\pi}{4}$ è

$$\Delta_t = \frac{\pi}{4} - \left(\arctan(e^t) - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\pi}{2} - \arctan(e^t).$$

Supponiamo ora di far variare il parametro t nel campo degli interi, cioè i possibili valori assumibili da t sono $t = 0,1,2,3,\cdots\cdots$. Questa assunzione è fondamentale per poter applicare la procedura iterativa che illustreremo.

La procedura seguita è una procedura iterativa che ad ogni iterazione minimizza l'errore compiuto nell'approssimare il valore di $\frac{\pi}{4}$ con l'integrale $I(t) = \int_0^t \frac{e^x}{e^{2x}+1}dx = \arctan(e^t) - \frac{\pi}{4}$. La metrica utilizzata va a minimizzare il valore Δ_t, al variare di t negli interi e rispetto ad una soglia di errore fissata in partenza.

Per essere più chiari la procedura così funziona:

Parametri di ingresso:

1.) $t = 1$

Elaborazioni effettuate:

1.)Si calcola $\Delta_t = \frac{\pi}{4} - \left(\arctan(e^t) - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\pi}{2} - \arctan(e^t)$;

2.)Si fa il confronto con la soglia: se $\Delta_t < \Delta_{ERR}$ allora accettiamo come valore di approssimazione Δ_t e la procedura termina altrimenti:

2.1)t=t+1

2.2)La procedura inizia daccapo col valore aggiornato di t.

Ecco la procedura secondo uno schema a blocchi: