

Soluzione del Problema 2

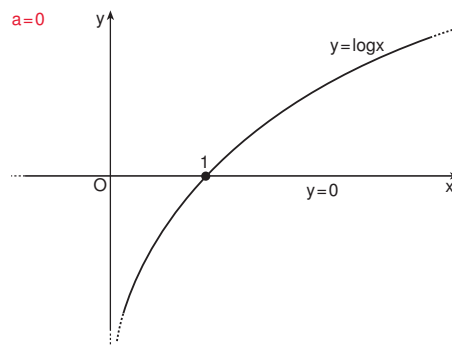
Punto 1.

Le eventuali soluzioni dell'equazione $\log x = ax^2$ sono gli zeri della funzione

$$h(x) = \log x - ax^2$$

al variare di $a \in \mathbb{R}$, che risulta continua nel suo dominio $\mathcal{D} =]0; +\infty[$.

Osserviamo che per $a = 0$ si ottiene la nota funzione logaritmica che ha un unico zero in $x = 1$.



Sia ora $a \neq 0$ e studiamo l'andamento della funzione agli estremi del dominio.

Si ha:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = -\infty \text{ per ogni valore di } a$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \begin{cases} +\infty & \text{se } a < 0 \\ -\infty & \text{se } a > 0 \end{cases}$$

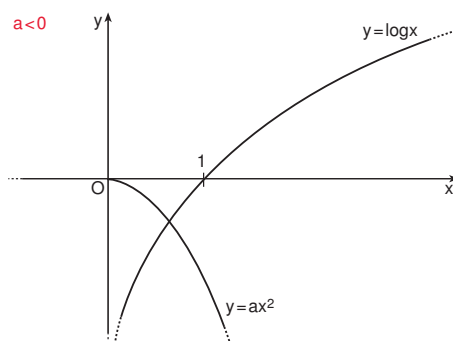
Trattiamo allora separatamente i casi $a < 0$ e $a > 0$.

Sia $a < 0$. Dallo studio dei limiti sopra effettuato, deduciamo che esistono $x_1, x_2 \in \mathcal{D}$ tali che $f(x_1) < 0$ e $f(x_2) > 0$. Per il teorema degli zeri, esiste almeno un punto nell'intervallo $]x_1; x_2[$ in cui la funzione si annulla.

D'altra parte, risulta:

$$h'(x) = \frac{1}{x} - 2ax > 0 \quad \text{in } \mathcal{D},$$

quindi la funzione è strettamente crescente. Pertanto anche nel caso $a < 0$ l'equazione $\log x = ax^2$ ha un'unica soluzione.



Sia $a > 0$. In questo caso i limiti agli estremi del dominio sono entrambi negativi. Studiamo il segno della derivata prima $h'(x) = \frac{1 - 2ax^2}{x}$ in \mathcal{D} . Risulta:

$$h'(x) \geq 0 \iff \begin{cases} 1 - 2ax^2 \geq 0 \\ x > 0 \end{cases} \iff 0 < x \leq \sqrt{\frac{1}{2a}}.$$

Poiché il massimo della funzione è assunto in $x = \sqrt{\frac{1}{2a}}$, l'esistenza degli zeri di h dipende dal segno di tale massimo. Calcoliamo

$$h\left(\sqrt{\frac{1}{2a}}\right) = \log \sqrt{\frac{1}{2a}} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}(\log 2a + 1).$$

Studiamo la disequazione

$$h\left(\sqrt{\frac{1}{2a}}\right) \geq 0 \iff \log 2a + 1 \leq 0 \iff a \leq \frac{1}{2e}.$$

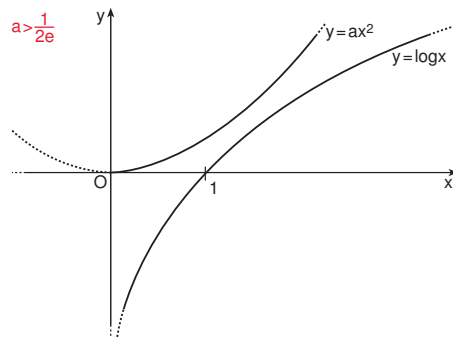
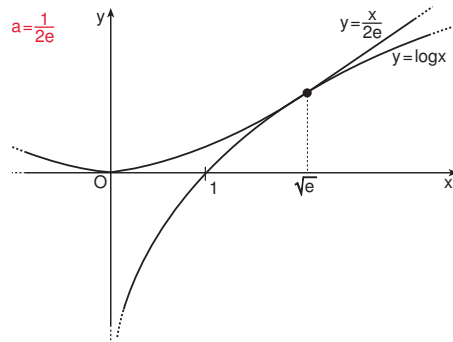
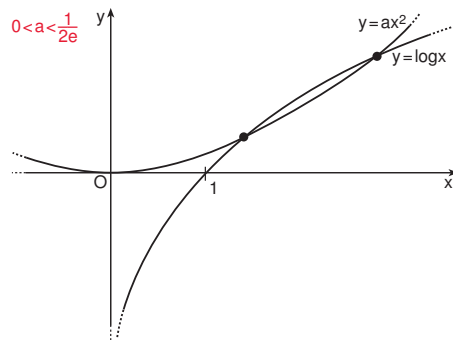
In conclusione:

se $0 < a < \frac{1}{2e}$: il massimo di h è positivo, i limiti agli estremi del dominio sono entrambi negativi, ed esiste un solo punto critico; quindi la funzione $h(x)$ ammette due zeri;

se $a = \frac{1}{2e}$: il massimo di h è zero ed esiste un solo punto critico, pertanto l'ascissa di tale massimo è l'unica soluzione dell'equazione assegnata dal problema;

se $a > \frac{1}{2e}$: poiché $\max h < 0$, non esistono soluzioni di $h(x) = 0$.

Gli zeri dell'equazione $\log x = ax^2$ possono essere interpretati graficamente come le ascisse dei punti di intersezione tra i grafici di $f(x)$ e $g(x)$, come mostrano le seguenti figure:



I grafici di f e g sono tangenti solo per $a = \frac{1}{2e}$. Infatti le due curve sono tangenti se e solo se si intersecano ed hanno la stessa retta tangente nel punto di intersezione. Algebricamente, questo equivale a risolvere il seguente sistema:

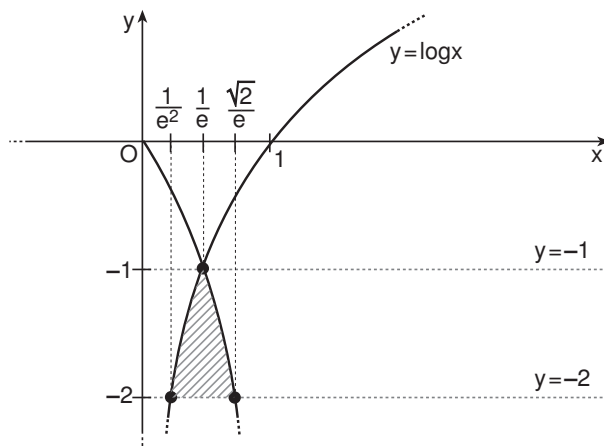
$$\begin{cases} g(x) = f(x) \\ g'(x) = f'(x) \end{cases} \iff \begin{cases} ax^2 = \log x \\ ax^2 = \frac{1}{2} \end{cases} \iff \begin{cases} \log x = \frac{1}{2} \\ ax^2 = \frac{1}{2} \end{cases} .$$

Questo sistema è soddisfatto se e solo se $x = \sqrt{e}$ e $a = \frac{1}{2e}$.

Punto 2.

La funzione g assume in questo caso la forma $g(x) = -e^2x^2$. Per quanto visto nel punto precedente, sappiamo che i grafici di f e g hanno un punto in comune, che in tal caso è proprio il punto $P(e^{-1}; -1)$.

Considerando le intersezioni tra la retta $y = -2$ e i grafici delle funzioni g e f , si ottengono rispettivamente i punti di ascissa e^{-2} e $\sqrt{2} e^{-1}$. Per determinare l'area \mathcal{A} evidenziata in figura, occorre dunque suddividere il dominio di integrazione nei due intervalli $[e^{-2}; e^{-1}]$ e $[e^{-1}; \sqrt{2} e^{-1}]$.



$$\begin{aligned}
\mathcal{A} &= \int_{e^{-2}}^{e^{-1}} (\log x + 2) dx + \int_{e^{-1}}^{\sqrt{2}e^{-1}} (-e^2 x^2 + 2) dx = \\
&= \left[x \log x \right]_{e^{-2}}^{e^{-1}} - \int_{e^{-2}}^{e^{-1}} x \cdot \frac{1}{x} dx + \left[2x \right]_{e^{-1}}^{e^{-1}} + \left[-e^2 \frac{x^3}{3} + 2x \right]_{e^{-1}}^{\sqrt{2}e^{-1}} \\
&= e^{-2} + \frac{4\sqrt{2} - 5}{3} e^{-1}.
\end{aligned}$$

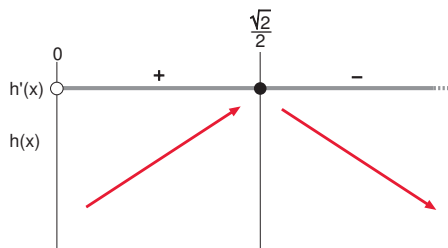
Punto 3.

Scegliamo $a = 1$ e disegniamo la funzione $h(x) = \log x - x^2$. Per quanto visto nei punti precedenti:

- il dominio è $\mathcal{D} =]0; +\infty[$;
- non esistono intersezioni con gli assi cartesiani e la funzione è sempre negativa perché il massimo è negativo;
- i limiti agli estremi di \mathcal{D} sono entrambi $-\infty$;
- la funzione è crescente in $]0; \frac{\sqrt{2}}{2}[$ e decrescente in $]\frac{\sqrt{2}}{2}; +\infty[$, e

$$\max_{x \in \mathcal{D}} h(x) = h\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{1}{2}(\log 2 + 1),$$

come riassunto nello schema che segue:



Osserviamo che non vi sono asintoti obliqui perché

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{h(x)}{x} = -\infty.$$

Rimane ora da studiare la derivata seconda.

$$h''(x) = \frac{-4x \cdot x - (1 - 2x^2)}{x^2} = \frac{-2x^2 - 1}{x^2}.$$

Risulta quindi:

$$h''(x) \geq 0 \iff -(2x^2 + 1) \geq 0$$

e questa disequazione non è mai soddisfatta. Pertanto la derivata seconda è sempre negativa e la funzione ha la concavità rivolta verso il basso in tutto il dominio. Il grafico della funzione è quindi il seguente:

