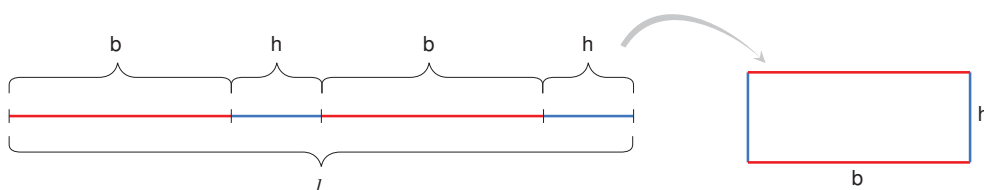


**Soluzione del Problema 1**

- Poiché la lunghezza del filo rappresenta il perimetro del rettangolo che delimita l'aiuola, detti  $b, h$  rispettivamente la base e l'altezza di tale rettangolo, si ha

$$b + h = \frac{l}{2}.$$



**Punto a).**

Scelta  $b$  come incognita, la funzione area da massimizzare risulta la seguente:

$$\mathcal{A}(b) = b \cdot \left( \frac{l}{2} - b \right) = -b^2 + \frac{l}{2}b, \quad b \in \left] 0; \frac{l}{2} \right[.$$

Il grafico di  $\mathcal{A}(b)$  è una parabola con la concavità rivolta verso il basso e vertice di ascissa  $\frac{l}{4}$ . Quindi il massimo della funzione è l'ordinata del vertice, cioè

$$\max_{b \in \left] 0; \frac{l}{2} \right[} \mathcal{A}(b) = \mathcal{A}\left(\frac{l}{4}\right) = \frac{l^2}{16}.$$

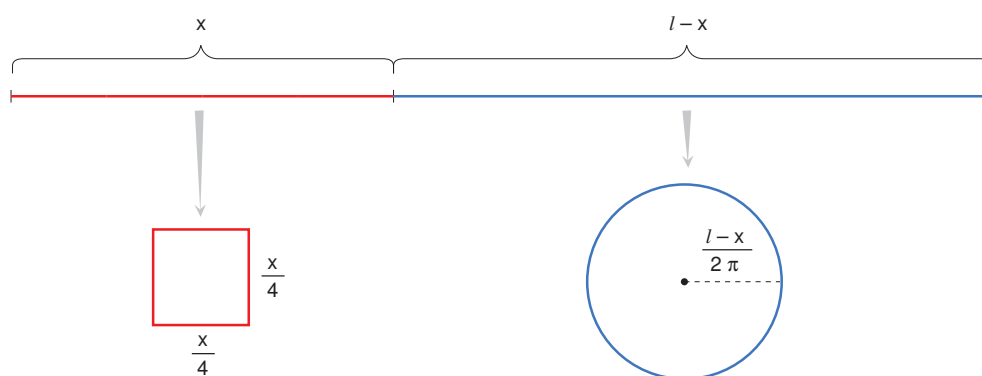
Si tratta del caso in cui l'aiuola ha la forma di un quadrato di lato  $\frac{l}{4}$ .

**Punto b).**

Indichiamo con  $x$  la parte del filo che si usa per delimitare l'aiuola di forma quadrata. La lunghezza del lato del quadrato  $\mathcal{Q}$  è dunque  $\frac{x}{4}$ .

Di conseguenza, la lunghezza della circonferenza che delimita l'aiuola  $\mathcal{C}$  di forma circolare è  $l - x$ ; ricaviamo quindi il raggio  $r$ :

$$2\pi r = l - x \quad \Longrightarrow \quad r = \frac{l - x}{2\pi}.$$



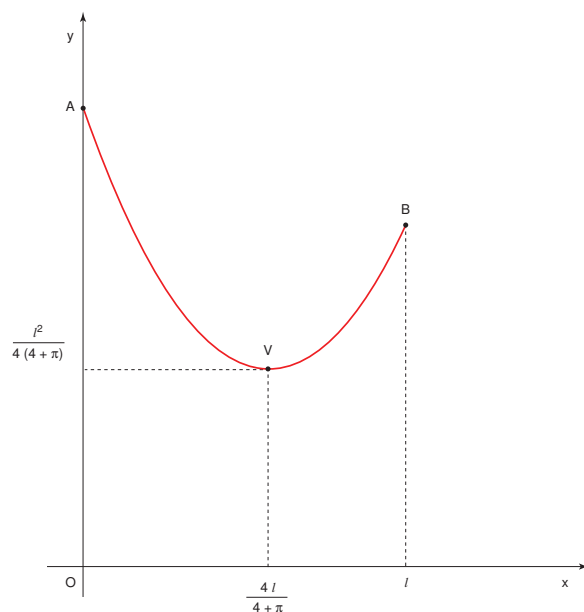
Siamo ora in grado di calcolare le due aree:

$$\begin{aligned} \text{area}(\mathcal{Q}) &= \left(\frac{x}{4}\right)^2 = \frac{x^2}{16}; \\ \text{area}(\mathcal{C}) &= \pi \left(\frac{l-x}{2\pi}\right)^2 = \frac{(l-x)^2}{4\pi}. \end{aligned}$$

Sommando si ottiene la seguente funzione:

$$g(x) = \left(\frac{1}{16} + \frac{1}{4\pi}\right) x^2 - \frac{l}{2\pi} x + \frac{l^2}{4\pi}, \quad x \in [0; l].$$

Il grafico di  $g$  è un ramo di parabola compreso tra i punti  $A(0; g(0))$  e  $B(l; g(l))$ , con la concavità rivolta verso l'alto. Osserviamo che i casi  $x = 0$  e  $x = l$  corrispondono entrambi all'utilizzo del filo intero (senza effettuare alcun taglio) per delimitare una sola aiuola di forma circolare ( $x = 0$ ) o una sola aiuola di forma quadrata ( $x = l$ ).



La funzione  $g(x)$  è continua in un intervallo limitato e chiuso, quindi, per il teorema di Weierstrass, ammette massimo e minimo assoluti. Precisamente, detto  $V$  il vertice della parabola, il minimo di  $g$  è l'ordinata di  $V$ . Poiché  $x_V = \frac{4l}{4 + \pi}$ , allora:

$$\min_{x \in [0; l]} g(x) = g\left(\frac{4l}{4 + \pi}\right) = \frac{l^2}{4(4 + \pi)}.$$

**Punto c).**

Il massimo di  $g$  viene assunto in uno degli estremi dell'intervallo di definizione. Osservando che

$$\frac{l^2}{4\pi} = g(0) > g(l) = \frac{l^2}{16},$$

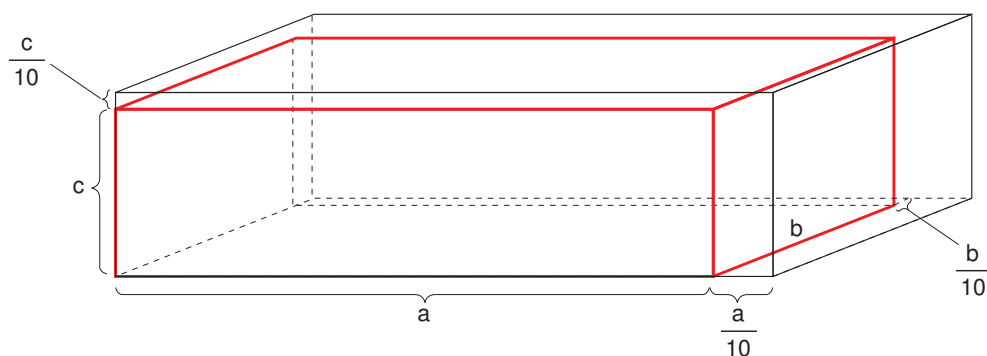
si conclude che  $\max g(x) = \frac{l^2}{4\pi}$ , cioè l'area massima si ottiene quando il filo non viene tagliato bensì utilizzato tutto per delimitare un'unica aiuola di forma circolare.

- Consideriamo ora un parallelepipedo a base rettangolare di dimensioni  $a$ ,  $b$ ,  $c$ . Il suo volume è dunque

$$\mathcal{V}_1 = abc.$$

Incrementando del 10% ciascuna dimensione, si ottiene un nuovo parallelepipedo di volume

$$\mathcal{V}_2 = \left(1 + \frac{10}{100}\right) a \cdot \left(1 + \frac{10}{100}\right) b \cdot \left(1 + \frac{10}{100}\right) c.$$



La differenza tra i due volumi risulta dunque essere

$$\mathcal{V}_2 - \mathcal{V}_1 = \left[ \left(1 + \frac{10}{100}\right)^3 - 1 \right] abc.$$

In termini percentuali, pertanto, si ottiene:

$$\left(1 + \frac{10}{100}\right)^3 - 1 = \frac{1331}{1000} - 1 = \frac{331}{1000} = 33,1\%.$$