

TEOREMI SULLE FUNZIONI DERIVABILI

INDICE

1. richiami
2. teorema da derivabile a continua
3. teorema di Fermat
4. teorema di Rolle
5. teorema di Lagrange o del valore medio
6. corollari
7. teorema di de L'Hôpital

RICHIAMI

Teorema di Weierstrass

Se $y=f(x)$ è una funzione continua in un intervallo chiuso e limitato $[a, b]$, allora $f(x)$ presenta almeno un valore massimo e un valore minimo, cioè esistono x_m e $x_M \in [a, b]$ tali che:

$$\forall x \in [a, b] \text{ vale } f(x_m) \leq f(x) \leq f(x_M)$$

definizione di funzione continua

$y=f(x)$ è una funzione continua in un punto x_0 se

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = 0$$

definizione di funzione derivabile

$y=f(x)$ è una funzione derivabile in un punto x_0 se

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = L \text{ con } L \text{ finito}$$

TEOREMI

Teorema da derivabile a continua

Se $y=f(x)$ è una funzione derivabile in un punto x_0 , allora in quel punto è anche continua, ma non vale il viceversa.

Dimostrazione

Si imposta il limite

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(x_0 + \Delta x) - f(x_0),$$

per ricondurlo alla definizione di funzione derivabile lo si divide e si moltiplica per Δx

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \Delta x.$$

Essendo per ipotesi la funzione derivabile in x_0 si deduce che

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \Delta x = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} L \Delta x = 0. \text{ c.v.d.}$$

INDICE

Viceversa se una funzione è continua in x_0 non è detto che sia derivabile: ad esempio in un punto singolare una funzione è continua, ma non derivabile.

Teorema di Fermat

Se $y=f(x)$ è una funzione definita in D e

1. x_0 è un punto interno a D
2. x_0 è derivabile
3. x_0 è un punto estremante

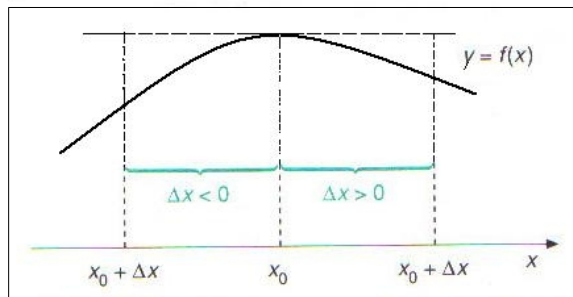
allora $f'(x_0) = 0$, cioè x_0 è un punto stazionario.

Dimostrazione

Ammettiamo che x_0 sia un punto di massimo assoluto (**ipotesi 3**), perciò

$$\forall x \in D \text{ vale } f(x_0) \geq f(x) \rightarrow f(x) - f(x_0) \leq 0.$$

Essendo x_0 un punto interno a D (**ipotesi 1**), posso calcolare il limite sinistro e destro del rapporto incrementale della funzione $y=f(x)$ nel punto x_0 :



limite sinistro $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = l$

limite destro $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = l_1$

nel primo caso essendo $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \leq 0$ e $\Delta x \leq 0$ si può concludere che $l \geq 0$

nel secondo caso essendo $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \leq 0$ e $\Delta x \geq 0$ si può concludere che $l_1 \leq 0$.

Essendo x_0 derivabile (**ipotesi 2**) si deduce che $l = l_1$ e quindi $l = l_1 = 0$ cioè $f'(x_0) = 0$. c.v.d.

INDICE

Teorema di Rolle

Se $y=f(x)$ è una funzione

1. continua in $[a, b]$
2. derivabile in (a, b)
3. $f(a) = f(b)$

allora esiste almeno un punto $x_0 \in (a, b)$ per cui $f'(x_0) = 0$

Dimostrazione

Essendo verificate le ipotesi del teorema di Weierstrass (**ipotesi 1**), esiste almeno un punto

$x_M \in [a, b]$ dove la funzione ha un massimo ed

esiste almeno un punto $x_m \in [a, b]$ dove la funzione ha un minimo.

Si presentano adesso due casi:

I caso

i due punti x_m, x_M coincidono con gli estremi a e b , ad esempio $x_m = a$ e $x_M = b$.

Per l'**ipotesi 3** risulta $f(x_m) = f(a) = f(b) = f(x_M)$

Questo implica che la funzione è costante, quindi la derivata è nulla in ciascun punto dell'intervallo:

$\forall x \in [a, b]$ vale $f'(x) = 0$ c.v.d.

II caso

Almeno uno dei due punti x_m, x_M è interno ad $[a, b]$.

Ammettiamo che sia x_M , per questo punto sono verificate le ipotesi del teorema di Fermat e quindi $f'(x_M) = 0$. c.v.d.

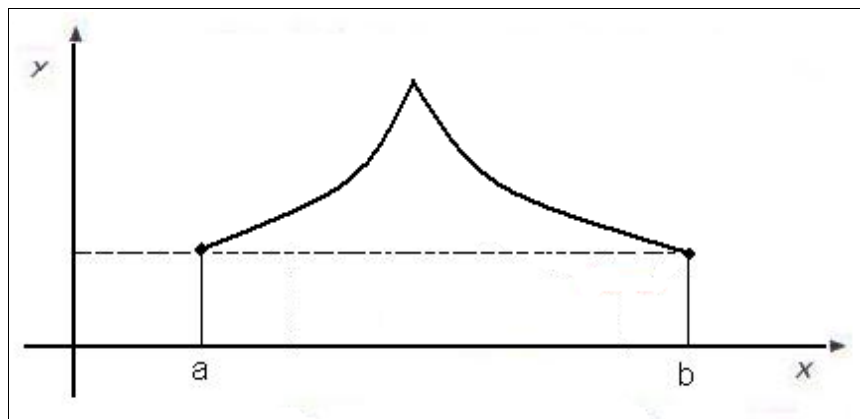
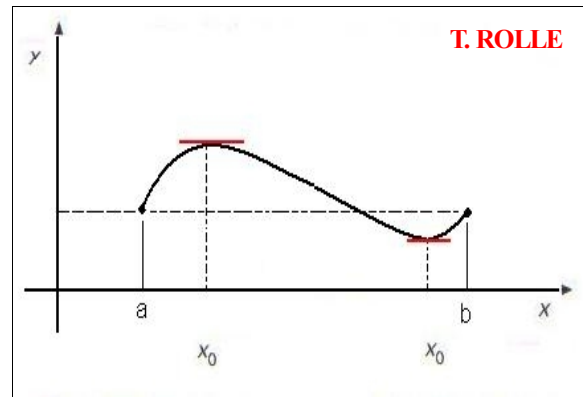
INDICE

Controesempio

Nel teorema di Rolle se cade l'ipotesi di derivabilità può cadere la tesi:

nell'esempio che segue la funzione è continua, ma ha un punto singolare di non derivabilità;

si può notare che la funzione non presenta punti in cui la derivata si annulla.



Teorema di Lagrange o del valore medio

Se $y=f(x)$ è una funzione

1. continua in un intervallo chiuso e limitato $[a, b]$
2. derivabile in (a, b)

allora esiste almeno un punto $x_0 \in (a, b)$

$$\text{per cui } f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Dimostrazione

Per la dimostrazione si cerca una funzione che verifichi le ipotesi del teorema di Rolle:

Si considera la retta passante per gli estremi della funzione $A(a; f(a))$ e $B(b; f(b))$:

$$g(x) = y = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a} (x - a)$$

$$\text{e si imposta la funzione } h(x) = f(x) - g(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} (x - a)$$

Questa funzione verifica le ipotesi del teorema di Rolle:

è continua e derivabile, infatti è formata da due funzioni continue e derivabili, inoltre

$$h(a) = f(a) - g(a) = f(a) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} (a - a) = 0$$

$$h(b) = f(b) - g(b) = f(b) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} (b - a) = 0$$

quindi $h(a) = h(b) = 0$

Dal momento che sono soddisfatte tutte le condizioni:

esiste almeno un punto $x_0 \in (a, b)$ per cui $h'(x_0) = 0$

$$\text{esprimiamo } h'(x_0) = f'(x_0) - g'(x_0) = f'(x_0) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0$$

ricorda che $g(x)$ è una retta per cui in ogni suo punto la derivata è uguale al suo coefficiente angolare.

Dall'ultima uguaglianza si ricava che

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad \text{c.v.d.}$$

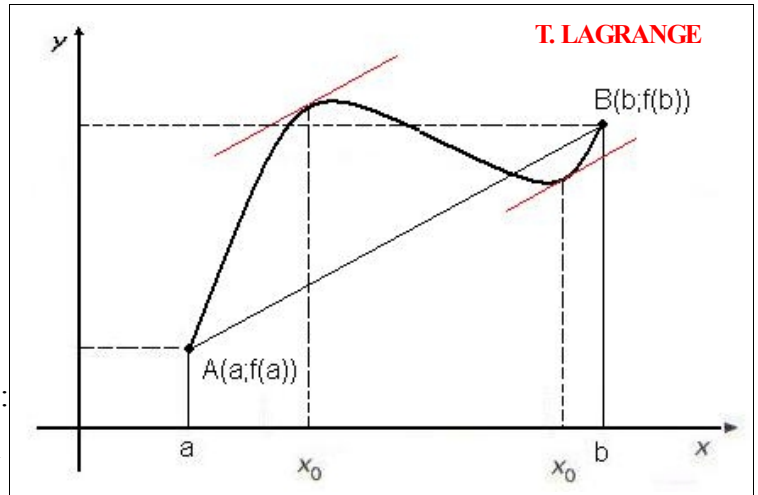
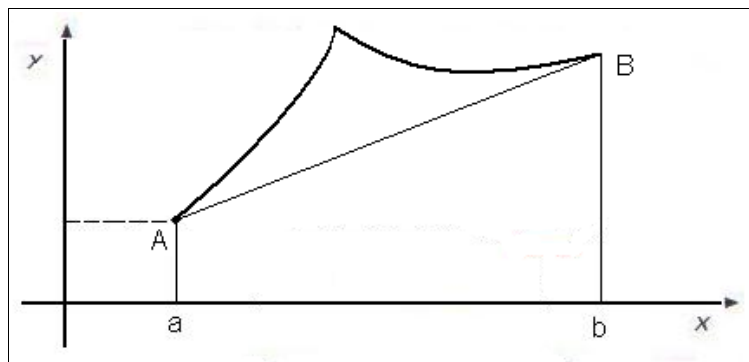
INDICE

controesempio

Nel teorema di Lagrange se cade l'ipotesi di derivabilità può cadere la tesi:

nell'esempio che segue la funzione è continua, ma ha un punto singolare di non derivabilità;

si può notare che la funzione non presenta punti in cui la derivata ha la stessa pendenza della retta AB.



Il teorema di Lagrange consente di dimostrare due importanti proprietà:

I corollario

Se $y=f(x)$ è una funzione derivabile in un intervallo $[a, b]$ e $\forall x \in [a, b]$ si ha $f'(x)=0$ allora la funzione è costante in $[a, b]$.

Dimostrazione

Si considerano due punti qualsiasi $x_1, x_2 \in [a, b]$, supponiamo che $x_1 < x_2$.

Nell'intervallo $[x_1, x_2]$ vale il teorema di Lagrange per cui esiste almeno un punto $x_0 \in [x_1, x_2]$

tale che $f'(x_0) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$.

Per ipotesi $\forall x \in [a, b]$ vale $f'(x)=0$ per cui $f(x_2) - f(x_1) = 0$ e $f(x_2) = f(x_1)$.

Siccome i punti x_1 e x_2 sono stati presi a piacere, si può concludere che la funzione assume lo stesso valore in tutti i punti di $[a, b]$, perciò è costante. c.v.d.

II corollario

Se $y=f(x)$ è una funzione derivabile in un intervallo $[a, b]$ e $\forall x \in [a, b]$ si ha $f'(x) > 0$ allora la funzione è crescente in $[a, b]$.

(Una funzione è crescente in $[a, b]$ quando $\forall x_2 > x_1 \in [a, b]$ anche $f(x_2) > f(x_1)$).

Dimostrazione

Si considerano due punti $x_1, x_2 \in [a, b]$, con $x_2 > x_1$.

Nell'intervallo $[x_1, x_2]$ vale il teorema di Lagrange per cui esiste almeno un punto $x_0 \in [x_1, x_2]$

tale che $f'(x_0) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$.

INDICE

Per ipotesi $\forall x \in [a, b]$ vale $f'(x) > 0$ per cui $f(x_2) - f(x_1) > 0$ e $f(x_2) > f(x_1)$.

Teorema di de L'Hôpital

I Teoremi di de l'Hopital permettono di calcolare alcuni limiti che si presentano nelle forme di indeterminazione $\frac{\infty}{\infty}$ e $\frac{0}{0}$ riconducendoli al calcolo dei limiti delle funzioni derivate.

I teorema forma $\frac{\infty}{\infty}$

Date due funzioni $y=f(x)$ e $y=g(x)$ e un punto x_0 (finito o infinito) in modo che

1. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \infty$

2. $f(x)$ e $g(x)$ siano entrambi derivabili in un intorno di x_0 , escluso il punto x_0 stesso

3. $g'(x) \neq 0$ nell'intorno di x_0 4. $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$

allora vale che $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = L$

II teorema forma $\frac{0}{0}$

Date due funzioni $y=f(x)$ e $y=g(x)$ e un punto x_0 (finito o infinito) in modo che

1. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$

2. $f(x)$ e $g(x)$ siano entrambi derivabili in un intorno di x_0 , escluso il punto x_0 stesso

3. $g'(x) \neq 0$ nell'intorno di x_0 4. $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$

allora vale che $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = L$

INDICE