Tema di: MATEMATICA

Risolvi uno dei due problemi e rispondi a 5 dei 10 quesiti del questionario.

Durata massima della prova: 4 ore.
È consentito soltanto l'uso di calcolatrici non programmabili.

PROBLEMA 1

1. Rappresenta nel piano cartesiano l'iperbole equilatera $\gamma:\ x^2-y^2=1$ e la retta *r:* $x = 3$.
2. Indica con **S** la regione del piano compresa tra l'iperbole γ e la retta *r* : scrivi la funzione f che esprime l'area del rettangolo generico inscritto nella regione **S**.
3. Riconosciuto che l'equazione di f è $y=2(3-x)\sqrt{x^2-1}$, studiane l'andamento e rappresentane il grafico.
4. Scrivi l'equazione della tangente alla curva nel punto di ascissa $x = 3$.

PROBLEMA 2

E' data la funzione

$$f(x)=\begin{cases} x(1-\log x) & x>0 \\ 0 & x=0 \end{cases}:$$

1. Verifica che f(x) è continua in 0;
2. Verifica che f(x) non è derivabile in 0;
3. Rappresenta graficamente la funzione f(x);
4. Scrivi l'equazione della tangente alla curva nel punto di ascissa $x = e$.

QUESTIONARIO

1.Considera un punto P qualunque interno ad una sfera. Calcola la probabilità che la distanza di P dal centro della sfera sia minore rispetto alla distanza di P dalla superficie sferica. **soluzione**

2.Da un mazzo di 40 carte estrai per 3 volte una carta a caso e ogni volta rimettila nel mazzo. Calcola qual è stata la probabilità di aver estratto una sola figura? E qual è stata la probabilità di aver estratto almeno una figura? **soluzione**

3.Determina k in modo che la funzione $y=\frac{x^2+kx}{2x+1}$ abbia come asintoto obliquo la retta $2x-4y+1=0$. **soluzione**

4.Dimostra che la funzione $y=f(x)=e^x+x$ ha un solo zero: $x_1=\alpha$. Calcola il valore di α approssimato ai decimi. Determina la primitiva di f che passa per l'origine. **soluzione**

5.Applica il teorema di *de l'Hôpital* per dimostrare che è: $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{100}}{e^x}=0$. **soluzione**

6.Determina per quale valore del parametro reale k la funzione $y=k\,sen\,x+\frac{1}{3}sen\,3x$ ha un estremo relativo per $x=\frac{\pi}{3}$. **soluzione**

7.Determina il parametro a in modo che il grafico della funzione $y=3x^2(2a\ \ln x-3a+8)+2(a-2)x^3+12$ abbia un flesso di ascissa 1. In tal caso la funzione ha anche massimi o minimi? **soluzione**

8.Considera la funzione $f(x)=\frac{e^{x^4}}{1+x^4}$ e dimostra che è invertibile per x maggiore o uguale a 0, mentre non lo è per ogni x reale. **soluzione**

9.Dopo aver enunciato il teorema di Rolle, spiega perché il suddetto teorema non è applicabile alla funzione $y=1+x+|4x-8|$ nell'intervallo [-2;3]. **soluzione**

10.Inscrivi nel segmento parabolico, delimitato dall'asse delle x e dalla parabola $y=4x-x^2$, il rettangolo di perimetro massimo. **soluzione**

Quesito 1

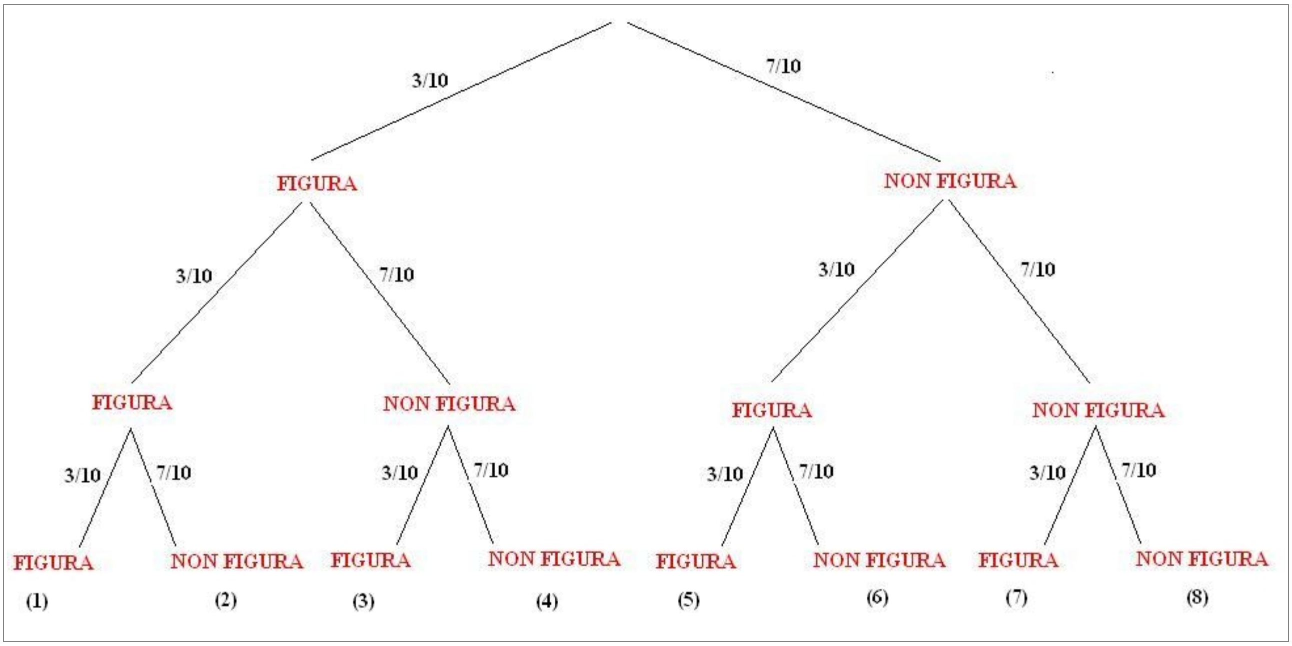
casi favorevoli: $s=\frac{4}{3}\pi\left(\frac{r}{2}\right)^3$

casi possibili: $n=\frac{4}{3}\pi r^3$

probabilità: $\frac{s}{n}=\frac{\frac{4}{3}\pi\left(\frac{r}{2}\right)^3}{\frac{4}{3}\pi r^3}=\frac{1}{8}$

Quesito 2

Grafo ad albero



a) probabilità (1 sola figura) = percorsi (3) +(6)+ (7)= $3*\left(\frac{3}{10}*\frac{7}{10}*\frac{7}{10}\right)=\frac{441}{1000}$

b) probabilità (almeno 1figura) =1-probabilità (nessuna figura)=

$$1-\frac{7}{10}*\frac{7}{10}*\frac{7}{10}=1-\frac{343}{1000}=\frac{657}{1000}$$

Quesito 3

Si scrive la retta in forma esplicita: $2x-4y+1=0 \rightarrow y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}$, perciò *m=1/2* e *q=1/4*

$$q=\frac{1}{4}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+kx}{2x+1}-\frac{1}{2}x=\lim\frac{2x^2+2kx-2x^2-x}{4x+2}=\lim\frac{2kx-x}{4x+2}$$

per calcolare il limite si considera il rapporto dei coefficienti di grado massimo:

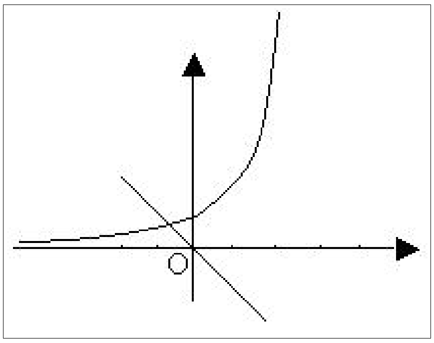
$$\lim\frac{2kx-x}{4x+2}=\frac{2k-1}{4}\rightarrow\frac{2k-1}{4}=\frac{1}{4}\rightarrow k=1$$

torna a questionario

Quesito 4

a) Per dimostrare che la funzione ha un solo zero si rappresentano sullo stesso piano cartesiano

$e^x + x = 0 \rightarrow e^x = -x \rightarrow y = e^x \quad ; \quad y = -x$



da cui si ricava che $-1 < \alpha < 0$

b) Per determinare il valore approssimato di α si imposta la tabella:

a	b	m	f(a)	f(b)	f(m)
-1,000	0,000	-0,500	-0,632	1,000	0,107
-1,000	-0,500	-0,750	-0,632	0,107	-0,278
-0,750	-0,500	**-0,625**	-0,278	0,107	-0,090

da cui di ricava che $\alpha = 0{,}6$

c) Per calcolare la primitiva richiesta si risolve l'integrale:

$$\int (e^x + x)\,dx = e^x + \frac{x^2}{2} + k \qquad \rightarrow y = e^x + \frac{x^2}{2} + k$$

si impone poi il passaggio per l'origine $\rightarrow 0 = e^0 + \frac{0^2}{2} + k$ e si calcola $\rightarrow 0 = 1 + k \quad \rightarrow k = -1$

Quesito 5

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^{100}}{e^x} = \frac{\infty}{\infty} \quad \rightarrow \lim_{x\to+\infty} \frac{100x^{99}}{e^x} = \frac{\infty}{\infty} \quad \rightarrow \lim_{x\to+\infty} \frac{100 * 99\,x^{98}}{e^x} = \frac{\infty}{\infty}$$ ripetendo per altre 98 volte

$$\rightarrow \lim_{x\to+\infty} \frac{100!}{e^x} = \frac{100!}{\infty} = 0$$ c.v.d.

Quesito 6

Per determinare gli estremi relativi della $y = k\,sen\,x + \frac{1}{3} sen\,3x$, si pone $f'(\frac{\pi}{3}) = 0$, per cui

$$f'(x) = k\cos x + \frac{1}{3}\cos(3x)3 = k\cos x + \cos(3x)$$

$$f'(\frac{\pi}{3}) = k\cos\frac{\pi}{3} + \cos(\pi) = 0$$

$$f'(\frac{\pi}{3}) = k\frac{1}{2} - 1 = 0 \rightarrow k = 2$$

Quesito 7

a) La funzione ha un flesso di ascissa 1 se $f''(1) = 0$ torna a questionario

$y = 3x^2(2a\ \ln x - 3a + 8) + 2(a-2)x^3 + 12$

$$y'=6x(2a\ \ln x-3a+8)+3x^2\frac{2a}{x}+6(a-2)x^2=6x(2a\ \ln x-3a+8)+6ax+6(a-2)x^2$$

$$y'=12ax\ln x-18ax+48x+6ax+6(a-2)x^2=12ax\ln x-12ax+48x+6(a-2)x^2$$

$$y''=12a\ln x+12ax\frac{1}{x}-12a+48+12(a-2)x=12a\ln x+12a-12a+48+12(a-2)x$$

$$y''=12a\ln x+48+12(a-2)x$$

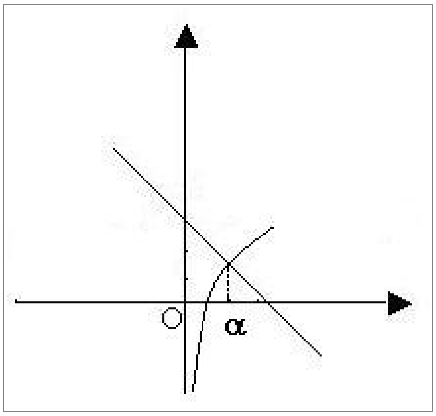
$f''(1)=0 \quad \rightarrow 12a\ln 1+48+12(a-2)1=0\rightarrow 48+12a-24=0\rightarrow 12a=-24\rightarrow a=-2$

b) Per calcolare se la funzione presenta massimi o minimi, si studia il segno di y'
se a = -2 $\quad y'=-24x\ln x+24x+48x-24x^2=-24x\ln x+72x-24x^2=-24x(\ln x-3+x)$

$$-24x(\ln x-3+x)>0$$

$\ln x-3+x>0\rightarrow \ln x>3-x\rightarrow x>\alpha$ *vedi grafico a lato*

		0	α	
$-24x$	+	−	−
$\ln x-3+x$	−	−	+
segno di y'	−	+	−
	↘	↗	↘



nel punto x = 0 la funzione presenta un minimo
nel punto x = α la funzione presenta un massimo.

Quesito 8

Una funzione si può invertire negli intervalli in cui è sempre crescente (o sempre decrescente).
Si studia quindi il segno della y' :

$$y=\frac{e^{x^4}}{1+x^4}\rightarrow y'=\frac{e^{x^4}4x^3(1+x^4)-e^{x^4}4x^3}{(1+x^4)^2}=\frac{e^{x^4}4x^3(1+x^4-1)}{(1+x^4)^2}=\frac{e^{x^4}4x^7}{(1+x^4)^2}$$

	0	
$4x^7$	−	+
	↘	↗

Si può concludere che, riducendo il dominio all'intervallo [0; +∞), la funzione si può invertire.

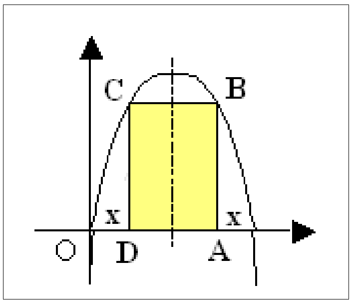
Quesito 9

il teorema di Rolle non è applicabile perché cade l'ipotesi di derivabilità , infatti:

$y=1+x+|4x-8| \quad \rightarrow \quad y'=1+\frac{|4x-8|}{4x-8}.4$

che non è derivabile in x = 2 appartenente all'intervallo [-2;3]. **torna a questionario**

Quesito 10



OD = x *C.E.* $0<x<2$
AD = $4-2x$
CD = $4x-x^2$
perimetro = $y = 2(4-2x+4x-x^2) = 2(-x^2+2x+4)$
$y' = 2(-2x+2) \quad \rightarrow \quad -2x+2>0 \quad \rightarrow \quad x<1$

	1	
+		-
↗		↘

x = 1 punto di max con perimetro = 10

torna a questionario