

Tema di: MATEMATICA

Risolvi uno dei due problemi e rispondi a 5 dei 10 quesiti del questionario.

Durata massima della prova: 4 ore.

È consentito soltanto l'uso di calcolatrici non programmabili.

PROBLEMA 1

Siano date la parabola λ e la retta r di equazioni rispettive: $y=4x-x^2$ e $y=x+3$

- Qual è la distanza minima tra λ ed r ? Come si calcola il suo valore?
- Siano A e B i punti di intersezione tra λ e la retta s di equazione $y=-x+4$. Determinare il punto P appartenente all'arco AB tale che il triangolo ABP abbia area massima
- Determinare l'area del segmento parabolico di base AB e si verifichi che essa è $\frac{4}{3}$ dell'area del triangolo ABP
- Determinare il volume del solido generato dalla rotazione completa del segmento parabolico di base AB attorno all'asse x .

PROBLEMA 2

Data la funzione $f(x)=\frac{4e^x}{(e^x+1)^2}$

- Mostrare che il suo grafico è simmetrico rispetto all'asse delle y
- Disegnarne il grafico.
- Calcolare l'area della regione di piano delimitata dalla funzione $f(x)$, dall'asse delle ascisse e dalle rette $x=0$ e $x=1$.
- Considerare poi le curve g_k di equazione $f(x)=\frac{4e^x}{(e^x+k)^2}$ con k positivo e verificare che il luogo dei punti di massimo di tutte le curve al variare di k è dato da $y=e^{-x}$.

QUESTIONARIO

1. Verificare che $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \sin 2t \, dt}{x^2} = 1$
2. Dimostrare che il volume di una sfera si calcola con la formula: $V = \frac{4}{3} \pi r^3$
3. Stabilire se la funzione $y = e^{-x} + e^x$ soddisfa le ipotesi del teorema di Rolle nell'intervallo $[-2; 2]$. In caso affermativo trovare i punti che verificano il teorema.
4. La probabilità che tre tiratori colpiscano il bersaglio sono $1/6$, $1/4$ e $1/3$, rispettivamente. Ciascuno spara una volta al bersaglio.
 - a) trovare la probabilità che uno e uno soltanto di essi colpisca il bersaglio;
 - b) se solo uno ha colpito il bersaglio, qual è la probabilità che sia stato il primo tiratore?
5. Di una funzione $f(x)$ si sa che ha derivata seconda uguale a $\cos x$ e che $f'(\frac{\pi}{2}) = 3$.
Quanto vale $f(\pi) - f(0)$?
6. La regione R delimitata dal grafico di $y = \sqrt{x}$, dall'asse x e dalla retta $x = 1$ è la base di un solido S le cui sezioni, ottenute tagliando S con piani perpendicolari all'asse x , sono tutte rettangoli aventi l'altezza tripla della base. Rappresentare graficamente R e calcolare il volume di S .
7. Dimostrare che l'equazione $x e^x = 1$ ammette una soluzione reale minore di 1 e calcolarne il valore approssimato.
8. Calcolare il valore di $\int_2^6 |x-3| \, dx$ e spiegare il suo significato geometrico.
9. Una sfera S è inscritta in un cubo C di lato 2. Verifica che il rapporto tra i volumi di S e C è uguale al rapporto tra le superfici totali di S e C .
10. Dopo aver dimostrato la regola d'integrazione per parti applicarla per calcolare

$$\int \ln x \, dx$$

PROBLEMA

Data la funzione reale di variabile reale

$$f(x) = \ln \frac{2-x}{x-a}$$

- a) determinare a in modo che il grafico di $f(x)$ passi per il punto di coordinate $(3; -\ln 3)$ e rappresentare graficamente la funzione così ottenuta, dopo averne individuato le principali caratteristiche. R. $a = 6$
- b) Tracciare il grafico di $|f(x)|$, indicando le sue eventuali caratteristiche di simmetria.
- c) Dimostrare che la funzione $f(x)$ è invertibile e determinare l'equazione dell'inversa $g(y)$. Calcolare quindi $g(1)$ e $g'(1)$.

QUESITI

1. La probabilità che in una data città vi sia un temporale in un giorno di luglio è uguale a 0,2. Calcolare la probabilità che:
 - a) il primo temporale del mese sia il 6 luglio;
 - b) nella prima decade di luglio ci sia almeno un temporale. R. a) 0,065536 b) 0,2684
2. Un solido ha per base un cerchio di raggio 1. Ogni sezione del solido ottenuta con un piano perpendicolare ad un prefissato diametro è un triangolo equilatero. Si calcoli il volume del solido. R. $\frac{4}{3}\sqrt{3}$