

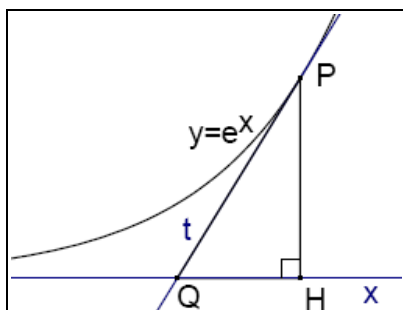
**QUESTIONARIO****1° gruppo. Quesiti sulle funzioni con parametro, con massimi e minimi, con asintoti**

- Calcola le derivate successive fino al IV ordine della funzione  $y = f(x) = \operatorname{sen} x$ .  
 Considera il polinomio  $y = g(x) = a + bx + cx^2 + dx^3$ . Determina  $a, b, c, d$  in modo che siano vere le seguenti uguaglianze:  
 $f(0) = g(0) \quad f'(0) = g'(0) \quad f''(0) = g''(0) \quad f'''(0) = g'''(0)$   
 R.  $y = 0 + x - 0x^2 - \frac{1}{6}x^3$
- Considera la funzione  $y = f(x) = \sqrt{ax^2 + bx + c}$ . Determina  $a, b, c$  in modo che la funzione intersechi l'asse delle  $x$  nei punti di ascissa 0 e 6 e formi, con una rotazione completa intorno all'asse delle  $x$ , nell'intervallo  $[0;6]$ , un solido di volume  $36\pi$ .  
 R.  $a = -1; b = 6; c = 0$
- Studia la pendenza della curva  $y = f(x) = \sqrt{-x^2 + 6x}$  e determinane le coordinate dei punti di minimo e di massimo.  
 R.  $\min (0;0) (6;0) \quad \max (3;3)$
- Qual è la condizione necessaria affinché una funzione  $y = f(x)$  abbia un asintoto obliquo
- Scrivi una funzione che abbia come asintoto orizzontale la retta  $y = -\frac{1}{2}$
- Considera la funzione  $y = \frac{2x^2 + 2}{x - 1}$ , verifica quali asintoti può ammettere e per ciascuno determinane la relativa equazione.  
 R.  $x = 1 \quad y = 2x + 2$
- Data la curva di equazione:  $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$   
 determina  $a, b, c, d$  sapendo che la curva passa per l'origine, ha nel punto di coordinate  $(3; 0)$  un minimo relativo e che l'area della regione di piano compresa fra la curva e l'asse  $x$  nell'intervallo  $(0;3)$  ha valore  $\frac{27}{4}$ .  
 R.  $y = x^3 - 6x^2 + 9x$
- Data la funzione  $y = \frac{ax+1}{x+b}$  determinare  $a$  e  $b$  in modo che  $\lim_{x \rightarrow 0} y = \infty$  e che  $\lim_{x \rightarrow \infty} y = 2$ . Determinata la curva, individuare i punti A e B in cui la tangente alla curva è perpendicolare alla retta  $x - 4y - 1 = 0$ .  
 R.  $a = 2; b = 0; A(-\frac{1}{2}; 0); B(\frac{1}{2}; 4)$
- Data la funzione  $y = \frac{ax^4 - x^2 + x + 1}{x^3 + bx^2}$ , determinare per quali valori dei parametri la funzione ha per asintoto obliquo la retta  $y = x - 1$ .  
 R.  $a = 1; b = 1$
- Si determini l'equazione del luogo geometrico dei centri delle circonferenze del piano tangenti alla parabola  $y = x^2 + 1$  nel punto  $(1, 2)$ .  
 R.  $y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$
- Data la retta  $s$  di equazione  $x + y = 5$ , sia  $P$  il punto, appartenente al primo quadrante, di intersezione tra  $s$  e una generica retta  $r$  passante per l'origine  $O$  e  $H$  la proiezione di  $P$  sull'asse  $x$ . Determinare la posizione di  $P$  in modo che sia massimo il volume del cono generato da una

rotazione completa del triangolo  $OPH$  attorno all'asse  $x$ .

$$R. \quad x_P = \frac{5}{3}$$

12. Considera la funzione  $f(x) = e^x$ , la tangente  $t$  in un suo punto  $P$ , la proiezione ortogonale  $H$  di  $P$  sull'asse  $x$  e l'intersezione  $Q$  tra  $t$  e l'asse delle ascisse. Dimostrare che la misura del segmento orientato  $QH$  vale 1 qualunque sia il punto  $P$ .



### 2° gruppo. Quesiti sui teoremi delle funzioni derivabili: Rolle, Lagrange, de l'Hopital

- Applicando il teorema de l'Hopital dimostra che  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^5}{2^x} = 0$ .
- In generale  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^n}{2^x} = 0$ . Come si trasforma il limite dopo averlo derivato  $n$  volte?
- Enuncia il teorema di Rolle.  
Dimostra che non è applicabile per la funzione  $y = \sqrt{|x|}$  definita nell'intervallo  $[-1;1]$ ,  
Dimostra che è applicabile per la funzione  $y = e^{-x^2}$  definita nell'intervallo  $[-1;1]$ .  
Per quest'ultima funzione determina l'ascissa del punto  $c$  la cui esistenza è garantita dal teorema stesso.  
R.  $c = 0$
- Si calcoli il seguente limite con il teorema di de l'Hopital:  
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2 \cos x}{x \sin x}$$
  
R. 2
- Sia  $f(x)$  una funzione reale di variabile reale, derivabile in un intervallo  $[a,b]$  e tale che, per ogni  $x$  di tale intervallo, risulti  $f'(x) = 0$ . Dimostrare che  $f(x)$  è costante in quell'intervallo.
- Siano  $f(x)$  e  $g(x)$  due funzioni reali di variabile reale, derivabili in un intervallo  $[a,b]$  e tale che, per ogni  $x$  di tale intervallo, risulti  $f'(x) = g'(x)$ . Dimostrare che  $f(x)$  e  $g(x)$  differiscono per una costante in quell'intervallo.

### 3° gruppo. Quesiti sulle funzioni integrabili

- Enunciare il teorema della media integrale. Determinare il valore medio della funzione  $y = e^{2x} - \frac{1}{2}e^x$  nell'intervallo  $[0,1]$ .  
R.  $h = \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{2}e$

2. Calcolare la derivata, rispetto a  $x$ , della funzione  $F(x)$  tale che:

$$F(x) = \int_x^{x+1} \ln t \, dt \quad \text{con } x > 0. \quad \text{R. } F'(x) = \ln \frac{x+1}{x}$$

3. La derivata della funzione

$$F(x) = \int_0^{x^2} e^{-t^2} \, dt \quad \text{è la funzione } F'(x) = 2x e^{-x^4}.$$

Eseguire tutti i passaggi necessari a giustificare l'affermazione.

4. Calcolare la derivata, rispetto a  $x$ , della funzione:

$$F(x) = \int_0^{2x} \frac{1}{\sin t} \, dt. \quad \text{R. } F'(x) = \frac{2}{\sin 2x}$$

5. Calcolare il limite:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\int_1^x e^{-t^2} \, dt}{x-1} \quad \text{R. } \frac{1}{e}$$

6. La regione  $R$  delimitata dal grafico di  $y = 2\sqrt{x}$ , dall'asse  $x$  e dalla retta  $x = 2$  (in figura) è la base di un solido  $S$  le cui sezioni, ottenute tagliando  $S$  con piani perpendicolari all'asse  $x$ , sono tutte rettangoli con la base metà dell'altezza. Si calcoli il volume di  $S$ . R. 4

#### 4° gruppo. Quesiti sul calcolo combinatorio e probabilità

1. Si lancia un dado regolare (a forma di cubo) e si guadagnano 12 euro se esce un numero più grande di 4; si perdono 9 euro se esce il numero 4 o un numero più piccolo di 4. Dire se il gioco è equo. Supponendo di aver iniziato a giocare con 100 euro, quanto si prevede di avere a disposizione, in media, dopo 50 partite? R. no; 0 €
2. Guglielmo è un arciere dilettante e si stima che, in media, abbia probabilità di  $\frac{3}{10}$  di colpire il bersaglio. Quanti tiri deve fare in modo che la probabilità di colpire il bersaglio almeno una volta sia superiore al 95%? R.  $n=9$
3. Considera un quadrato di lato 2. Preso a caso un punto  $P$  interno al quadrato, calcola la probabilità che la sua distanza da un qualsiasi vertice sia maggiore 1. R.  $\frac{4-\pi}{4}$
4. Una classe è composta da 12 ragazzi e 4 ragazze. Tra i sedici allievi se ne scelgono 3 a caso; qual è la probabilità che essi siano tutti maschi? R.  $\frac{11}{28}$

#### 5° gruppo. Quesiti di geometria solida

1. Quale è la capacità massima, espressa in centilitri, di un cono di apotema  $2 \, dm$ ? R.  $r = \sqrt{\frac{8}{3}}$
2. Due sfere  $S_1$  ed  $S_2$  sono rispettivamente inscritta e circoscritta ad un cubo di lato  $\ell$ . Determinare il rapporto tra le aree delle superfici di  $S_1$  e  $S_2$  e quello tra i volumi di  $S_1$  e  $S_2$ . R.  $\frac{1}{3}; \frac{1}{3\sqrt{3}}$

3. La capacità di un serbatoio è pari a quella del cubo inscritto in una sfera di un metro di diametro. Quanti sono, approssimativamente, i litri di liquido che può contenere il serbatoio?

$$R. \frac{1000}{3\sqrt{3}}$$

### 6° gruppo. Quesiti sui metodi numerici

1. Tenuto conto che:

$e = 1 + \int_0^1 e^x dx$  calcola un'approssimazione di  $e$  utilizzando il metodo di integrazione numerica studiato (bastano 4 trapezi).

2. Si dimostri che l'equazione  $\sqrt[3]{x} = 1 - x^3$  ha una e una sola radice  $\alpha$  e, utilizzando una calcolatrice tascabile, se ne dia una stima.
3. Si calcoli con la precisione di 2 cifre decimali lo zero della funzione  $f(x) = x^3 + x - 1$ . Come si può essere certi che esiste un solo zero?

### PROBLEMA 1

E' assegnata la famiglia di funzioni

$$y = f(x) = \frac{kx^2 - 1}{x^3} \quad (\mathbf{F})$$

1. Verifica che le funzioni date (**F**) ammettono punti di massimo e di minimo relativo solo se  $k > 0$ .
2. Supposto  $k > 0$ , determina l'equazione del luogo geometrico  $\lambda$  dei punti di massimo delle curve della famiglia (**F**); disegna il grafico di  $\lambda$ .
3. Determina il valore di  $k$  per cui la funzione della famiglia (**F**) ha nel punto di ascissa  $x = 1$ , la tangente  $t$  parallela alla retta  $y = 2x$ . Chiamare  $\gamma$  la curva ottenuta per tale valore del parametro  $k$ . Scrivere l'equazione della retta tangente  $t$ .
4. Studiare e rappresentare la curva  $\gamma$ .
5. Indicare con  $A$  e  $F$  i punti di ascissa positiva in cui la curva  $\gamma$  ha, rispettivamente, ordinata nulla e un flesso, calcolare l'area della parte di piano limitata dalla curva  $\gamma$  e dalla retta  $AF$ .

### PROBLEMA 2

1. Determinare i valori  $a$  e  $b$  dei parametri, in modo che la funzione reale di variabile reale

$$f(x) = \begin{cases} a - e^x & \text{per } x < 0 \\ bx + x^2 + \frac{x^3}{3} & \text{per } x \geq 0 \end{cases}$$

sia continua e derivabile su tutto l'asse reale.

2. Verificato che ciò si ottiene per  $a = 1$  e  $b = -1$ , tracciare il grafico della funzione così ottenuta.
3. Mostrare che nel punto di ascissa 0 la funzione non è dotata di derivata seconda
4. Determinare l'area della regione piana  $\Gamma$  limitata dal grafico della funzione, dall'asse delle ascisse e dalla retta di equazione  $x=1$ .
5. Determinare il volume del solido avente la regione  $\Gamma$  come base e tale che le sue sezioni con piani perpendicolari all'asse delle ascisse siano quadrati.