

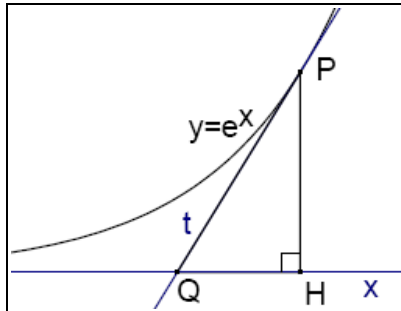
QUESTIONARIO

Quesiti sulle funzioni con parametro, con massimi e minimi, con asintoti

- Calcola le derivate successive fino al IV ordine della funzione $y = f(x) = \operatorname{sen} x$.
 Considera il polinomio $y = g(x) = a + bx + cx^2 + dx^3$. Determina a, b, c, d in modo che siano vere le seguenti uguaglianze:
 $f(0) = g(0) \quad f'(0) = g'(0) \quad f''(0) = g''(0) \quad f'''(0) = g'''(0)$
 R. $y = 0 + x - 0x^2 - \frac{1}{6}x^3$
- Considera la funzione $y = f(x) = \sqrt{ax^2 + bx + c}$. Determina a, b, c in modo che la funzione intersechi l'asse delle x nei punti di ascissa 0 e 6 e formi, con una rotazione completa intorno all'asse delle x , nell'intervallo $[0;6]$, un solido di volume 36π .
- Studia la pendenza della curva $y = f(x) = \sqrt{-x^2 + 6x}$ e determinane le coordinate dei punti di minimo e di massimo.
 R. min (0;0) (6;0) max(3;3)
- Qual è la condizione necessaria affinché una funzione $y = f(x)$ abbia un asintoto obliquo
 Scrivi una funzione che abbia come asintoto orizzontale la retta $y = -\frac{1}{2}$
 Considera la funzione $y = \frac{2x^2 + 2}{x - 1}$, verifica quali asintoti può ammettere e per ciascuno determinane la relativa equazione.
 R. $x = 1 \quad y = 2x + 2$
- Data la curva di equazione: $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$
 determina a, b, c, d sapendo che la curva passa per l'origine, ha nel punto di coordinate (3; 0) un minimo relativo e che l'area della regione di piano compresa fra la curva e l'asse x nell'intervallo (0;3) ha valore $\frac{27}{4}$.
 R. $y = x^3 - 6x^2 + 9x$
- Data la funzione $y = \frac{ax + 1}{x + b}$ determinare a e b in modo che $\lim_{x \rightarrow 0} y = \infty$ e che $\lim_{x \rightarrow \infty} y = 2$. Determinata la curva, individuare i punti A e B in cui la tangente alla curva è perpendicolare alla retta $x - 4y - 1 = 0$.
- Data la funzione $y = \frac{ax^4 - x^2 + x + 1}{x^3 + bx^2}$, determinare per quali valori dei parametri la funzione ha per asintoto obliquo la retta $y = x - 1$.
- Si determini l'equazione del luogo geometrico dei centri delle circonferenze del piano tangenti alla parabola $y = x^2 + 1$ nel punto (1, 2).
 R. $y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$
- Data la retta s di equazione $x + y = 5$, sia P il punto, appartenente al primo quadrante, di intersezione tra s e una generica retta r passante per l'origine O e H la proiezione di P sull'asse x . Determinare la posizione di P in modo che sia massimo il volume del cono generato da una rotazione completa del triangolo OPH attorno all'asse x .

$$R \quad r: y = Kx \rightarrow H\left(\frac{5}{k+1}; 0\right) \rightarrow Vol = \frac{125\pi}{3} \frac{k^2}{(k+1)^3} \rightarrow max: k=2 \rightarrow H\left(\frac{5}{3}; 0\right)$$

10. Considera la funzione $f(x) = e^x$, la tangente t in un suo punto P , la proiezione ortogonale H di P sull'asse x e l'intersezione Q tra t e l'asse delle ascisse. Dimostrare che la misura del segmento orientato QH vale 1 qualunque sia il punto P .



Quesiti sui teoremi delle funzioni derivabili: Rolle, Lagrange, de l'Hopital

1. Applicando il teorema de l'Hopital dimostra che $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^5}{2^x} = 0$

In generale $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^n}{2^x} = 0$. Come si trasforma il limite dopo averlo derivato n volte?

2. Enuncia il teorema di Rolle.

Dimostra che non è applicabile per la funzione $y = \sqrt{|x|}$ definita nell'intervallo $[-1; 1]$,

Dimostra che è applicabile per la funzione $y = e^{-x^2}$ definita nell'intervallo $[-1; 1]$.

Per quest'ultima funzione determina l'ascissa del punto c la cui esistenza è garantita dal teorema stesso. R. $c = 0$

3. Si calcoli il seguente limite con il teorema di de l'Hopital:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2 \cos x}{x \sin x}$$

R. 2

4. Sia $f(x)$ una funzione reale di variabile reale, derivabile in un intervallo $[a, b]$ e tale che, per ogni x di tale intervallo, risulti $f'(x) = 0$. Dimostrare che $f(x)$ è costante in quell'intervallo.
5. Siano $f(x)$ e $g(x)$ due funzioni reali di variabile reale, derivabili in un intervallo $[a, b]$ e tale che, per ogni x di tale intervallo, risulti $f'(x) = g'(x)$. Dimostrare che $f(x)$ e $g(x)$ differiscono per una costante in quell'intervallo.

Quesiti sulle funzioni integrabili

1. Enunciare il teorema della media integrale. Determinare il valore medio della funzione

$$y = e^{2x} - \frac{1}{2}e^x \text{ nell'intervallo } [0, 1].$$

$$R. h = \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{2}e$$

2. Calcolare la derivata, rispetto a x , della funzione $f(x)$ tale che:LTGG

$$f(x) = \int_x^{x+1} \ln t \, dt \quad \text{con } x > 0.$$

R. $\ln(x+1) - \ln x$

3. La derivata della funzione

$$F(x) = \int_0^{x^2} e^{-t^2} \, dt$$

è la funzione $F'(x) = 2x e^{-x^4}$. Eseguire tutti i passaggi necessari a giustificare l'affermazione.

4. Calcolare la derivata, rispetto a x , della funzione:

$$F(x) = \int_0^{2x} \frac{1}{\sin t} \, dt.$$

R. $\frac{2}{\sin 2x}$

5. Calcolare il limite:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\int_1^x e^{-t^2} \, dt}{x-1}$$

R. $\frac{1}{e}$

6. La regione R delimitata dal grafico di $y = 2\sqrt{x}$, dall'asse x e dalla retta $x = 2$ (in figura) è la base di un solido S le cui sezioni, ottenute tagliando S con piani perpendicolari all'asse x , sono tutte rettangoli con la base metà dell'altezza. Si calcoli il volume di S .

R. 4

Quesiti sul calcolo combinatorio e probabilità

- Si lancia un dado regolare (a forma di cubo) e si guadagnano 12 euro se esce un numero più grande di 4; si perdono 9 euro se esce il numero 4 o un numero più piccolo di 4. Dire se il gioco è equo. Supponendo di aver iniziato a giocare con 100 euro, quanto si prevede di avere a disposizione, in media, dopo 50 partite? R. no; 0 €
- Guglielmo è un arciere dilettante e si stima che, in media, abbia probabilità di $3/10$ di colpire il bersaglio. Quanti tiri deve fare in modo che la probabilità di colpire il bersaglio almeno una volta sia superiore al 95%? R. $n = 9$
- Considera un quadrato di lato 2. Preso a caso un punto P interno al quadrato, calcola la probabilità che la sua distanza da un qualsiasi vertice sia maggiore 1. R. $\frac{4-\pi}{4}$
- Una classe è composta da 12 ragazzi e 4 ragazze. Tra i sedici allievi se ne scelgono 3 a caso; qual è la probabilità che essi siano tutti maschi? R. $\frac{11}{28}$

Quesiti di geometria solida

- Due sfere S_1 ed S_2 sono rispettivamente inscritta e circoscritta ad un cubo di lato ℓ . Determinare il rapporto tra le aree delle superfici di S_1 e S_2 e quello tra i volumi di S_1 e S_2 . R. $1/3 \quad 1/3\sqrt{3}$
- La capacità di un serbatoio è pari a quella del cubo inscritto in una sfera di un metro di

diametro. Quanti sono, approssimativamente, i litri di liquido che può contenere il serbatoio?
 R. $1000/3\sqrt{3}$

3. Quale è la capacità massima, espressa in centilitri, di un cono di apotema 2 dm ? R. $r = \sqrt{\frac{8}{3}}$

Quesiti sui metodi numerici

1. Tenuto conto che:

$$\frac{\pi}{4} = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx$$

calcola un'approssimazione di π greco utilizzando uno dei metodi di integrazione numerica studiati.

2. Si dimostri che l'equazione $\sin x = x - 1$ ha una e una sola radice α e, utilizzando una calcolatrice tascabile, se ne dia una stima.

PROBLEMA 1

E' assegnata la famiglia di funzioni

$$y = f(x) = \frac{kx^2 - 1}{x^3} \quad (\mathbf{F})$$

1. Verifica che le funzioni date (**F**) ammettono punti di massimo e di minimo relativo solo se $k > 0$.
2. Supposto $k > 0$, determina l'equazione del luogo geometrico λ dei punti di massimo delle curve della famiglia (**F**); disegna il grafico di λ . R. $y = \frac{2}{x^3}$
3. Determina il valore di k per cui la funzione della famiglia (**F**) ha nel punto di ascissa $x = 1$, la tangente t parallela alla retta $y = 2x$. Chiamare γ la curva ottenuta per tale valore del parametro k . Scrivere l'equazione della retta tangente t . R. $k=1 \quad y=2(x-1)$
4. Studiare e rappresentare la curva γ .
5. Indicare con A e F i punti di ascissa positiva in cui la curva γ ha, rispettivamente, ordinata nulla e un flesso, calcolare l'area della parte di piano limitata dalla curva γ e dalla retta AF .

PROBLEMA 2

1. Determinare i valori a e b dei parametri, in modo che la funzione reale di variabile reale

$$f(x) = \begin{cases} a - e^x & \text{per } x < 0 \\ bx + x^2 + \frac{x^3}{3} & \text{per } x \geq 0 \end{cases}$$

sia continua e derivabile su tutto l'asse reale.

2. Verificato che ciò si ottiene per $a = 1$ e $b = -1$, tracciare il grafico della funzione così ottenuta.
3. Mostrare che nel punto di ascissa 0 la funzione non è dotata di derivata seconda
4. Determinare l'area della regione piana Γ limitata dal grafico della funzione, dall'asse delle ascisse e dalla retta di equazione $x=1$.
5. Determinare il volume del solido avente la regione Γ come base e tale che le sue sezioni con piani perpendicolari all'asse delle ascisse siano quadrati.