ESERCIZI DI MATEMATICA - classi V A B lst

1. È data una semicirconferenza di diametro $AB = 2r$ e centro O. Siano M e P due suoi punti tali che M appartenga all'arco AP e sia $M\hat{B}P = \frac{\pi}{6}$.

   Posto $A\hat{B}P = x$, trova la funzione $y = f(x)$ che esprime il rapporto fra le aree dei triangoli AMP e BOP

   R. $\frac{AMP}{BOP} = \frac{\frac{1}{2} AM\ AP\ sen\frac{\pi}{6}}{\frac{1}{2} OB\ BP\ sen\, x} \quad \rightarrow \quad y = f(x) = \frac{\sqrt{3}}{2} tg\, x - \frac{1}{2}$

2. Determinare i coefficienti a, b, c, d nella formula $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ in modo che il grafico passi per O (0,0) e la curva abbia un punto di flesso nel punto F(1,1) con tangente in F parallela all'asse delle x. R. $y = x^3 - 3x^2 + 3x$

3. Studia la funzione $y = 2x \ln x$ e rappresentane il grafico.

Integrali delle funzioni razionali fratte del tipo:

a) $\int \frac{q}{ax^2+bx+c} dx$ b) $\int \frac{px+q}{ax^2+bx+c} dx$

I caso: $\Delta > 0$

$$\rightarrow \int \frac{A}{a(x-x_1)} dx + \int \frac{B}{(x-x_2)} dx = \frac{A}{a} \ln|x-x_1| + B \ln|x-x_2| + K$$

II caso: $\Delta = 0$

a) $\int \frac{q}{ax^2+bx+c} dx = \int \frac{q}{a(x-x_1)^2} dx = \frac{q}{a} \int (x-x_1)^{-2} dx = \frac{q}{a} \quad \frac{-1}{x-x_1} + K$

b) $\int \frac{px+q}{ax^2+bx+c} dx = \rightarrow \int \frac{A}{a(x-x_1)^2} dx + \int \frac{B}{a(x-x_1)} dx = \frac{A}{a} \frac{-1}{(x-x_1)} + \frac{B}{a} \ln|x-x_1| + K$

III caso: $\Delta < 0$

a) $\int \frac{q}{ax^2+bx+c} dx$ si applica al denominatore il metodo del completamento al quadrato, per cui si ottiene $\frac{q}{a} \int \frac{1}{(x+k)^2+m^2} dx = \frac{q}{a} \frac{1}{m} arctg \frac{x+k}{m} + K$ con $k = \frac{b}{2a}$ e $m = \frac{-\Delta}{4a^2}$

b) $\int \frac{px+q}{ax^2+bx+c} dx$ si riconduce l'integrale alla forma

$$\int \frac{2ax+b}{ax^2+bx+c} dx + \int \frac{h}{ax^2+bx+c} dx = \ln|ax^2+bx+c| + \frac{1}{m} arctg \frac{x+k}{m} + K$$

esempi

1) II caso: $\int \frac{x+5}{x^2-6x+9}dx = \int \frac{A}{(x-3)^2}dx+\int \frac{B}{(x-3)}dx$ per determinare A e B si imposta la seguente identità: $\frac{x+5}{(x-3)^2}=\frac{A+B(x-3)}{(x-3)^2} \quad \rightarrow x+5=A+B(x-3)$

se $x=3\rightarrow 8=A$

se $x=0\rightarrow 5=8-3B\rightarrow B=1$

$$\int \frac{x+5}{x^2-6x+9}dx = \int \frac{8}{(x-3)^2}dx+\int \frac{1}{(x-3)}dx = \frac{-8}{(x-3)}+\ln|x-3|+K$$

2) III caso: $\int \frac{x+2}{x^2-4x+6}dx =$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{2x-4+4+4}{2x^2-4x+6}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x-4}{2x^2-4x+6}dx + \frac{1}{2}\int \frac{8}{2x^2-4x+6}dx =$$

$$= \frac{1}{2}\ln|2x^2-4x+6| + 4\int \frac{1}{(x-2)^2+2}dx =$$

$$= \frac{1}{2}\ln|2x^2-4x+6| + \frac{4}{\sqrt{2}}arctg\frac{x-2}{\sqrt{2}}+K$$

Esercizi sugli integrali

Calcola i seguenti integrali:

I caso: $\Delta>0$

1. $\int \frac{1}{x^2-4}dx$	2. $\int \frac{1}{x^2-x-6}dx$	3. $\int \frac{x+2}{x^2-2x-3}dx$
R. $\frac{1}{4}\ln|x-2|-\frac{1}{4}\ln|x+2|+K$	R. $\frac{1}{5}\ln|x-3|-\frac{1}{5}\ln|x+2|+K$	R. $\frac{5}{4}\ln|x-3|-\frac{1}{4}\ln|x+1|+K$

II caso: $\Delta=0$

1. $\int \frac{1}{x^2-4x+4}dx$	2. $\int \frac{x+1}{x^2-2x+1}dx$	3. $\int \frac{1}{x^2+8x+16}dx$
R. $\frac{-1}{x-2}+K$	R. $\ln|x-1|-\frac{2}{x-1}+K$	R. $\frac{-1}{x+4}+K$

III caso: $\Delta<0$

1. $\int \frac{1}{x^2+4}dx$	2. $\int \frac{1}{x^2+2x+3}dx$	3. $\int \frac{2x+5}{x^2+3x+5}dx$
R. $\frac{1}{2}arctg\frac{x}{2}+K$	R. $\frac{\sqrt{2}}{2}arctg\frac{x+1}{\sqrt{2}}+K$	R. $\ln|x^2+3x+5|+\frac{4}{\sqrt{11}}arctg\frac{2x+3}{\sqrt{11}}+K$