FUNZIONI IRRAZIONALI

$$y=\sqrt[n]{f(x)}$$

Condizioni d'esistenza:

se n è pari si pone $f(x)\geq 0$
se n è dispari non si pone alcuna condizione

Segno della funzione

Il segno della y coincide con quello della $f(x)$

se n è pari , siccome $f(x)\geq 0$ la y è positiva o nulla
se n è dispari, dove $f(x)\geq 0$ la y è positiva o nulla
dove $f(x)<0$ la y è negativa

Limiti

1. Nello studio dei limiti delle funzioni irrazionali è spesso necessario portar fuori dal segno di radice la x . E' quindi necessario ricordare questa regola:

   $\sqrt{x^2}=|x|$ e non $\sqrt{x^2}=x$

   infatti come risultato di una radice quadrata si considerano solo risultati positivi.
   Ad esempio $\sqrt{9}=3$, $\sqrt{\frac{4}{25}}=\frac{2}{5}$.

   Nella prima uguaglianza questa proprietà viene verificata nella seconda no.

   Ad esempio
   se sostituisco nella prima uguaglianza -4 alla x ottengo come risultato 4.

   se sostituisco nella seconda uguaglianza -4 alla x ottengo come risultato -4 e una radice non può avere come risultato un numero negativo.

   In pratica mettendo il modulo mi garantisco che il risultato di una radice quadrata sia positivo.

LIMITI DI FUNZIONI IRRAZIONALI

1) $$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{\sqrt{x^2-1}}{x-3} = \frac{\sqrt{x^2(1-\cancel{1/x^2})}}{x(1-\cancel{3/x})} = \frac{|x|}{x}$$

se $x \longrightarrow -\infty$ $\quad y=-x/x=-1 \longrightarrow$ A.Or.

se $x \longrightarrow +\infty$ $\quad y=x/x=1 \longrightarrow$ A.Or.

2) $$\lim_{x \to -\infty} \frac{x-\sqrt{9x^2+1}}{3x-4} = \frac{x-\sqrt{x^2(9+\cancel{1/x^2})}}{x(3-\cancel{4/x})} = \frac{x-3|x|}{3x} = \frac{x+3x}{3x} = 4/3$$

3) $$\lim_{x \to -\infty} \frac{x^2-4x}{x\sqrt{2x^2-3}} = -1/\sqrt{2}$$

2. Nelle funzioni irrazionali i limiti si studiano solo negli estremi del dominio che non appartengono al dominio stesso.

   Ad esempio,

   nella funzione $y=\frac{\sqrt{x^2-1}}{x-3}$ che ha come dominio

   D = $(-\infty ;-1]\ [+1 ; 3)\ (3 ;+\infty)$

   si studieranno solo i limiti a $\mp\infty$ e in 3, mentre i limti a ∓ 1 non si considerano.

3. Se nello studio dei limiti delle funzioni irrazionali si incontrano forme di indeterminazione $\infty-\infty ; \frac{\infty}{\infty} ; \frac{0}{0} ; 0\cdot\infty$ è spesso necessario moltiplicare numeratore e denominatore per il fattore razionalizzante. Questo procedimento consente di arrivare ad una semplificazione della frazione che elimina la forma di indeterminazione e permette di dare un risultato.
   esempi

1. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(2x+\sqrt{4x^2+x}\right)$

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x^2+2x}$

$$\lim_{x\to-\infty} 2x+\sqrt{4x^2+x}=-\infty+\infty$$

fattore razionalizzante $\quad 2x-\sqrt{4x^2+x}$

$$\lim_{x\to-\infty}(2x+\sqrt{4x^2+x})\bullet\frac{(2x-\sqrt{4x^2+x})}{(2x-\sqrt{4x^2+x})}=\lim_{x\to-\infty}\frac{4x^2-4x^2-x}{2x-|2x|\sqrt{1+\cancel{\frac{1}{4x}}}}=$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{-x}{2x+2x}=-\frac{\cancel{x}}{4\cancel{x}}=-\frac{1}{4}$$

y=-1/4 asintoto orizzontale

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}-1}{x^2+2x}=\frac{0}{0}$$

fattore razionalizzante $\quad \sqrt{x+1}+1$

dal prodotto notevole $\quad (a-b)(a+b)=a^2-b^2$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}-1}{x^2+2x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}-1}{x^2+2x}\bullet\frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}+1}=\lim_{x\to 0}\frac{x+1-1}{(x^2+2x)(\sqrt{x+1}+1)}=$$

per eliminare la forma di indeterminazione è sempre necessario poter fare una semplificazione, in questo caso

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cancel{x}}{\cancel{x}(x+2)(\sqrt{x+1}+1)}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{(x+2)(\sqrt{x+1}+1)}=\frac{1}{4}$$