IL TEOREMA DI de L'HÔPITAL

TEORIA

Il teorema di de L'Hôpital è uno *strumento* molto utile per risolvere, in molti casi, i limiti delle forme indeterminate $\frac{0}{0}$ e $\frac{\infty}{\infty}$.

A grandi linee il Teorema di de L'Hôpital afferma che:

se $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\infty}{\infty}$ oppure $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{0}{0}$ allora $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$

esempi

1. $\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x}=\frac{\infty}{\infty}$ allora $\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$

2. $\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{2}}{x^2-1}=\frac{0}{0}$ allora $\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{2}}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{2\sqrt{x+1}}}{2\text{x}}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{2\sqrt{x+1}}\frac{1}{2\text{x}}=\frac{1}{4\sqrt{2}}$

   eventualmente questo procedimento si può reiterare come nell'esempio che segue:

3. $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{e^x-1}=\frac{\infty}{\infty}$ allora $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{e^x-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{2\text{x}}{e^x}=\frac{\infty}{\infty}$ allora

   $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{e^x-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{2\text{x}}{e^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{e^x}=\frac{2}{\infty}=0$

Ecco cosa afferma questo teorema (senza dimostrazione):

I forma $\frac{\infty}{\infty}$

Date due funzioni $y=f(x)$ e $y=g(x)$ e un punto x_o (finito o infinito) in modo che

1. $\lim_{x\to x_0} f(x)=\lim_{x\to x_0} g(x)=\infty$
2. $f(x)$ e $g(x)$ siano entrambi derivabili in un intorno di x_o ,escluso il punto x_o stesso
3. $g'(x)\neq 0$ nell'intorno di x_o
4. $\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=L$

allora vale che $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=L$

II forma $\frac{0}{0}$

Date due funzioni $y=f(x)$ e $y=g(x)$ e un punto x_o (finito o infinito) in modo che

1. $\lim_{x\to x_0} f(x)=\lim_{x\to x_0} g(x)=0$
2. $f(x)$ e $g(x)$ siano entrambi derivabili in un intorno di x_o ,escluso il punto x_o stesso
3. $g'(x)\neq 0$ nell'intorno di x_o
4. $\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=L$

allora vale che $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=L$

IL TEOREMA DI de L'HÔPITAL

ESERCIZI

Dopo aver verificato che sono soddisfatte le ipotesi del teorema di de l'Hopital, calcola i limiti che si presentano nella forma di indeterminazione $\frac{0}{0}$:

1. $\lim_{x\to 0}\frac{arctg\, x}{x^2+2x}$ *R.* $\frac{1}{2}$	2. $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\ln(sen\, x)}{2x-\pi}$ R. 0	3. $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1-x)}{tg\, x}$ R. -1
4. $\lim_{x\to 0}\frac{arcsen\, x}{x}$ R. 1	5. $\lim_{x\to 0}\frac{sen\, 2x}{arcsen\, x}$ R. 2	6. $\lim_{x\to 1}\frac{1-\sqrt{x}}{\ln x^2}$ R. $-\frac{1}{4}$

Dopo aver verificato che sono soddisfatte le ipotesi del teorema di de l'Hopital, calcola i limiti che si presentano nella forma di indeterminazione $\frac{\infty}{\infty}$:

1. $\lim_{x\to\infty}\frac{5^x}{x^2}$ *R.* ∞	2. $\lim_{x\to\infty}\frac{2x+\ln x}{x+2}$ R. 2	3. $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\ln(tg\, x)}{tg\, x}$ R. 0

STUDIO DELLE FUNZIONI GONIOMETRICHE

TEORIA

Le funzioni goniometriche sono spesso periodiche per cui il loro studio può essere limitato all'intervallo di periodicità.

Approfondimenti e richiami sulle funzioni periodiche

1. funzione *y=f(x)* ha un periodo *T* se questo è il valore minimo per cui $f(x)=f(x+kT)\ con\ k=0,\pm1,\pm2,.....$.

2. $y=sen\, x\ e\ y=\cos x$ hanno periodo $T=2\pi$.
.
3. $y=tg\, x$ ha periodo $T=\pi$.

4. Se applichiamo ad una funzione periodica una dilatazione o riduzione orizzontale: $\begin{cases} x'=\frac{x}{h} \\ y'=y \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=hx' \\ y=y' \end{cases}$ anche il periodo subisce la stessa trasformazione per cui ad esempio:
   se $y=sen\, x \rightarrow y'=sen\, hx'$ allora se $T=2\pi \rightarrow$ $T'=\frac{2\pi}{h}$

5. La somma di funzioni periodiche ha come periodo il *m.c.m.* dei periodi delle singole funzioni, ad esempio:
   $y=sen\, 4x$ ha come periodo $T=\frac{2\pi}{4}=\frac{\pi}{2}=90°$
   $y=tg\, 3x$ ha come periodo $T=\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{3}=60°$
   quindi $y=sen\, 4x+tg\, 3x$ ha come periodo *T = m.c.m.(90°;60°) =180° =π .*

esempio: studia e rappresenta il grafico della funzione: $y=\cos^2 x-\cos x$

osservazioni:

- il periodo di $y=\cos x$ è $T=2\pi$, il periodo di $y=\cos^2 x$ è $T=\pi$ per cui il periodo della funzione come somma è $T=2\pi$.
- Lo studio della funzione può essere limitato all'intervallo $[-\pi;\pi]$

Dominio di y: D= $[-\pi;\pi]$

Intersezione con gli assi: $\begin{cases} x=0 \\ y=1-1=0 \end{cases}$; $\begin{cases} y=0 \\ cosx(cosx-1)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} cosx=0 \\ (cosx-1)=0 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} x=\pm\frac{\pi}{2} \\ x=0 \end{matrix}$

Segno di y: $cosx(cosx-1)>0$

-π -π/2 0 π/2 π

cosx	-	+	+	-
cosx-1	-	-	-	-
Segno di y=f(x)	+	-	-	+

Limiti di y negli estremi del dominio:
coincidono con il valore della funzione negli estremi: *f(-π)=2 e f(π)=2*

calcolo della derivata prima: $y' = -2cosx\ senx + senx$

Dominio della y' : D'=D , non ci sono punti singolari.

Segno di y': $senx(-2\cos x+1)>0$

-π -π/3 0 π/3 π

sen x	-	-	+	+
1-2cosx	+	-	-	+
Segno di y'=f ' (x)	-	+	-	+
Crescita o decrescita	↘	↗	↘	↗

max min max min max

Estremanti:

f(-π)=2 massimo assoluto f(-π/3)=-1/4 minimo assoluto f(0)=0 massimo relativo
f(π/3)=-1/4 minimo assoluto f(π)=2 massimo assoluto

calcolo della derivata seconda :

$y'' = -2(-senx\ senx+cosx\ cosx)+cosx=-2(-sen^2x+cos^2x)+cosx= -2(-(1-cos^2x)+cos^2x)+cosx=$
$-2(2cos^2x-1)+cosx=-4cos^2x+cosx+2$

Segno di y'':

$-4cos^2x+cosx+2>0$ $\cos x=\frac{1\pm\sqrt{33}}{8}$ con una calcolatrice

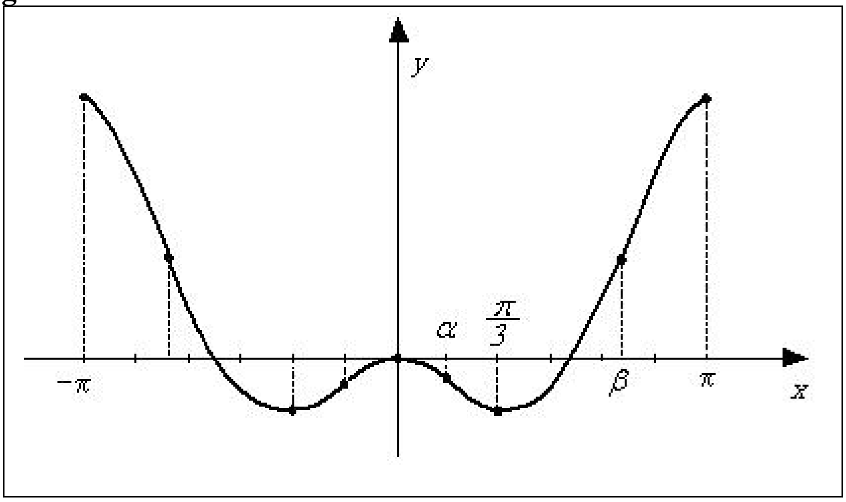
$\alpha = arc\cos x\frac{1+\sqrt{33}}{8}\approx\frac{\pi}{6}$ $\beta = arc\cos x=\frac{1-\sqrt{33}}{8}\approx\frac{7}{10}\pi$

-π -β -α 0 α β π

Segno di y''=f '' (x)	-	+	-	-	+	-
concavità	∩	∪	∩	∩	∪	∩

flesso flesso flesso flesso

grafico della funzione



ESERCIZI

studia e rappresenta il grafico delle seguenti funzioni:

1. $y = \cos x - \dfrac{1}{\cos x}$ R. D = [-π;-π / 2) ∪ (-π / 2;π / 2) ∪ (π / 2;π] ; Max relativo (0;0) , min relativo (-π ;0) (π ;0).

2. $y = \dfrac{1 - sen\,x}{\cos x}$ R. D = [-π;-π / 2) ∪ (-π / 2;π / 2) ∪ (π / 2;π] ; per il limite in $\dfrac{\pi}{2}$ usa il T. di de l'Hopital;non ci sono max. ne min.

3. $y = tg\,x - 3\,tg^2 x$ R. D= $\left(\dfrac{-\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right)$; Max. in x = *arc tg 1/6.*