DISEQUAZIONI ESPONENZIALI E LOGARITMICHE

Le **disequazioni esponenziali** si risolvono con le stesse modalità delle equazioni esponenziali, ma ricordando la seguente regola fondamentale:

$a^{f(x)} > a^{g(x)}$ *allora* $f(x) > g(x)$ *quando* $a > 1$, $f(x) < g(x)$ *quando* $0 < a < 1$

$a^{f(x)} < a^{g(x)}$ *allora* $f(x) < g(x)$ *quando* $a > 1$, $f(x) > g(x)$ *quando* $0 < a < 1$

In generale, quando si passa allo studio degli esponenti, vale la regola:
Se la base è maggiore di 1 si conferma il verso della disuguaglianza
Se la base è compresa tra 0 e 1 si cambia il verso della disuguaglianza.

Esempi

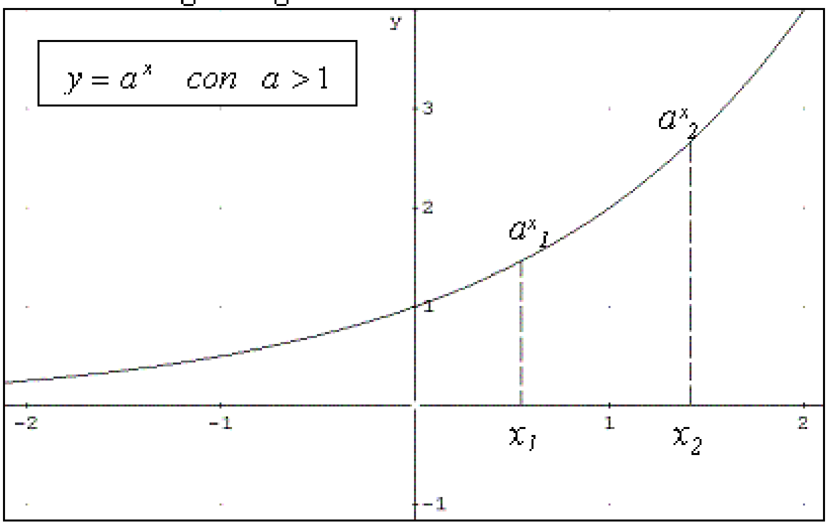
$2^{3x-1} > 2^{x-5} \quad \Rightarrow 3x-1 > x-5 \quad \Rightarrow 2x > -4 \quad \Rightarrow x > -2$

Si conferma il verso

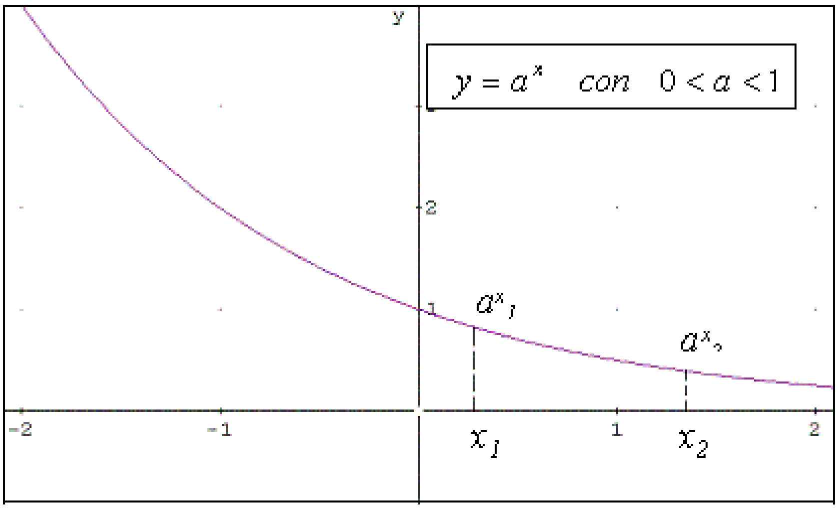
$\left(\frac{1}{2}\right)^{3x-1} > \left(\frac{1}{2}\right)^{x-5} \quad \Rightarrow 3x-1 < x-5 \quad \Rightarrow 2x < -4 \quad \Rightarrow x < -2$

Si cambia il verso

Questa regola è una conseguenza del fatto che
Avendo $a>1$ la funzione $y = a^x$ è crescente, perciò se $x_1 < x_2$ anche $a^{x_1} < a^{x_2}$ e viceversa, come si osserva dal seguente grafico:



Avendo $0 < a < 1$ la funzione $y = a^x$ è decrescente, perciò se $x_1 < x_2$ si verifica che $a^{x_1} > a^{x_2}$ e viceversa, come si osserva dal seguente grafico:



Le **disequazioni logaritmiche** si risolvono con le stesse modalità delle equazioni logaritmiche, ma ricordando la seguente regola fondamentale:

$$\log_a f(x) > \log_a g(x) \ \textit{allora} \ f(x) > g(x) \ \textit{quando} \ a > 1 \ , \ f(x) < g(x) \ \textit{quando} \ 0 < a < 1$$

$$\log_a f(x) < \log_a g(x) \ \textit{allora} \ f(x) < g(x) \ \textit{quando} \ a > 1 \ , \ f(x) > g(x) \ \textit{quando} \ 0 < a < 1$$

In generale, quando si passa allo studio degli argomenti, vale la regola:
Se la base è maggiore di 1 si conferma il verso della disuguaglianza
Se la base è compresa tra 0 e 1 si cambia il verso della disuguaglianza.

Esempi

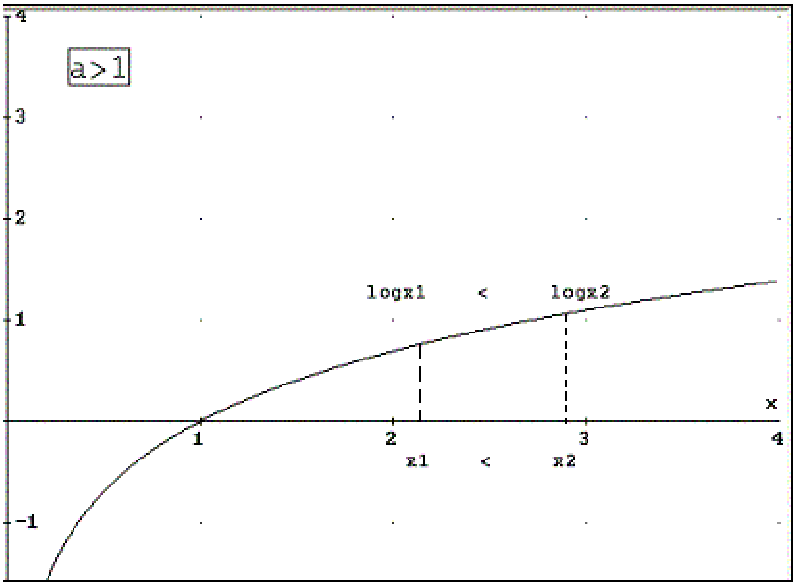
$$\log_2(3x-1) > \log_2(x) \quad \Rightarrow 3x-1 > x \quad \Rightarrow 2x > 1 \quad \Rightarrow x > \frac{1}{2} \quad C.E.\ x > \frac{1}{3} \quad sol.\ x > \frac{1}{2}$$

Si conferma il verso

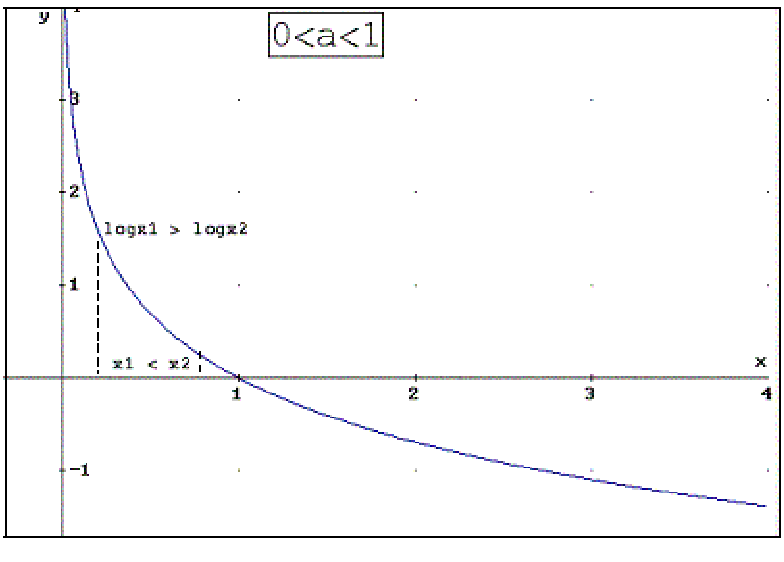
$$\log_{\frac{1}{2}}(3x-1) > \log_{\frac{1}{2}}(x) \quad \Rightarrow 3x-1 < x \quad \Rightarrow 2x < 1 \quad \Rightarrow x < \frac{1}{2} \quad C.E.\ x > \frac{1}{3} \quad sol.\ \frac{1}{3} < x < \frac{1}{2}$$

Si cambia il verso

Questa regola è una conseguenza del fatto che
Avendo $a>1$ la funzione $y = \log_a x$ è crescente, perciò se $x_1 < x_2$ anche $\log_a x_1 < \log_a x_2$ e viceversa, come si osserva dal seguente grafico:



Avendo $0 < a < 1$ la funzione $y = \log_a x$ è decrescente, perciò se $x_1 < x_2$ si verifica che $\log_a x_1 > \log_a x_2$ e viceversa, come si osserva dal seguente grafico:



ESERCIZI

1) Risolvi le disequazioni esponenziali:

$a)\quad 7^{x^2-1} < \sqrt[3]{7^{x+1}} \qquad \left[R. -1 < x < \frac{4}{3}\right]$ $\qquad b)\quad 4^{3x-2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^x > 64 \qquad [R.\ x > 2]$

$c)\quad \left(\frac{2}{5}\right)^x > \frac{4}{25} \qquad [R.\ x < 2]$ $\qquad d)\quad 2\cdot 2^{2x} - 17\cdot 2^x + 8 < 0 \qquad [poni\ 2^x = t\quad R.\ -1 < x < 3]$

$e)\quad 4^{x^2} < 4\sqrt[3]{4^{x+1}} \qquad \left[R\ \ -1 < x < \frac{4}{3}\right]$ $\qquad f)\quad \frac{3^{3x}}{9}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^x > \frac{1}{3^{-4}} \qquad [R.\ x > 3]$

$g)\quad 2^{x+1} + 2^{2-x} > 9 \qquad [poni\ 2^x = t\quad R.\ x < -1 \cup x > 2]$

2) Risolvi le disequazioni logaritmiche esprimendo le C.E. :

$a)\ \log_{\frac{1}{2}}(x+1) - \log_{\frac{1}{2}}(5-x) < 1 \qquad [R.\ C.E.\ -1 < x < 5\ sol.\ 1 < x < 5]$

$b)\quad \log_9(1-x) < 1 \qquad [R.\ -8 < x < 1]$

$c)\ \log_2(x+2) - 1 < \log_2(x-1) \qquad [R.\ C.E.\ x > 1\ sol.\ x > 4]$

$d)\quad \log_{\frac{1}{3}}(x-3) > \frac{1}{2}\log_{\frac{1}{3}} 9 \qquad [R.\ \ 3 < x < 6]$

3) Risolvi graficamente le equazioni date, segui questo schema

- poni l'espressione del I membro uguale a y, ottieni una funzione y = f(x) della quale rappresenti il grafico
- poni l'espressione del II membro uguale a y, ottieni una funzione y = f(x) della quale rappresenti il grafico sullo stesso piano cartesiano della prima funzione
- le coordinate dei punti di intersezione, rappresentano le soluzioni dell'equazione

$a)\quad \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} = x \quad [R.\ (1;1)]$ $\qquad b)\quad \log_2 x = 1 - x^2 \quad [R.\ (1\ ;\ 0)]$

$c)\quad 2^x - 1 = -\frac{1}{2}x + 4 \qquad R.\quad (2\ ;\ 3)$ $\qquad d)\quad \log_{\frac{1}{2}} x = x^2 - 2x - 1 \qquad [R.\ (2\ ;\ -1)]$

4) Disequazioni esponenziali che si risolvono con i logaritmi:

$a)\quad 2^{x+1} < 3^{1-x} \qquad R.\quad x < \log_6\frac{3}{2}$ $\qquad b)\quad 2^{x+1}\cdot 4^{1+x} > 6\cdot 5^{1-x} \qquad R.\quad x > \log_{40}\frac{15}{4}$

$c)\quad 2^{x+1} + 2^{x-2} > 9\cdot 5^{x+2} \qquad R.\quad x < \log_{\frac{2}{5}} 100$