

# Nozioni Sui Transistor A Giunzione Bipolare

Galasso Omar

I.I.S. E.Mattei San Donato Milanese

Anno 2010

# Sommario:

1.0 Generalità del BJT .....	3
1.1 Configurazione ad emettitore comune .....	5
1.2 Caratteristica di ingresso .....	6
1.3 Caratteristica di uscita .....	7
2.0 Funzionamento in On -OFF o commutazione.....	8
3.0 Esercizio di progetto: BJT come interruttore comandato .....	10
4.0 Studio della polarizzazione per via grafica .....	13
5.0 Polarizzazione ad emettitore comune con alimentazione singola.....	15
6.0 Eliminare le variazioni di corrente indesiderate .....	16
7.0 Circuito amplificatore nella configurazione ad emettitore comune.....	18
8.0 Studio dell'amplificatore ad emettitore comune (trattazione non approssimata) .....	21

## 1.0 Generalità del BJT

Il BJT (dall'inglese Transistor a Giunzione Bipolare) è un componente elettronico attivo, ovvero in grado di controllare tramite un controllo in ingresso una variabile in uscita maggiore di quella in ingresso. È un tripolo costituito dai tre terminali denominati base, collettore ed emettitore e può essere classificato in base ai modelli di generatori pilotati come un CCCS (Current Controlled Current Source) cioè come generatore di corrente pilotato in corrente. Il BJT è di natura non lineare ma mediante un adeguata rete di polarizzazione formata da componenti passivi come resistenze può esserlo reso. Questi transistor possono essere utilizzati principalmente come interruttori controllati da una corrente (sfruttando il naturale stato di non linearità) o come amplificatori (attribuendogli una rete di polarizzazione) studiando per quest'ultimo il modello statico e dinamico se si tratta di un amplificatore di segnale. Esistono due tipi di BJT, il PNP e l'NPN: questi due hanno tra loro una notevole differenza di funzionamento dato che hanno differenti versi di correnti. Nel caso del transistor NPN si ha una corrente di base  $I_B$  entrante, una corrente di collettore  $I_C$  entrante e una corrente di emettitore  $I_E$  uscente a contrario del PNP che deve essere utilizzato con una  $I_E$  entrante, una  $I_B$  uscente e una  $I_C$  uscente.

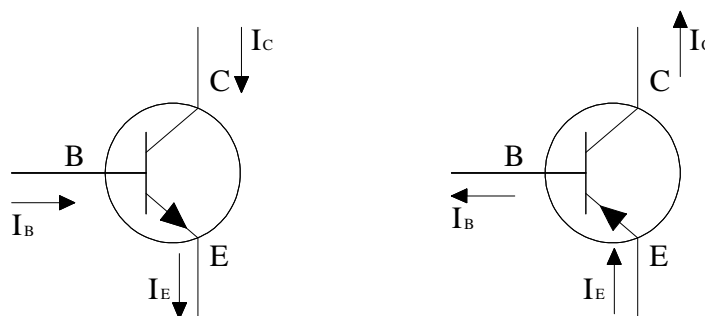


Figura 1 - BJT NPN e BJT PNP

Quando si osserva lo schema del BJT si può notare che le tre correnti convergono in uno stesso punto centrale e da ciò si può applicare il primo principio di Kirchhoff ad una superficie immaginata quindi come un nodo ottenendo un'equazione identica sia per il PNP che per l'NPN:

$$I_E = I_C + I_B$$

Come detto in precedenza, il transistor è un componente tripolare ma può essere visto come un quadripolo mettendo in comune un terminale con gli altri due riuscendo così a vederlo non solo come quadripolo ma come doppio bipolo e mettendo in evidenza una porta di ingresso e una di uscita. Esistono tre possibili configurazioni: a collettore comune, a base comune e ad emettitore comune. Quest'ultima configurazione è quella che viene maggiormente utilizzata: ponendo l'emettitore a massa si nota una porta di ingresso condizionata da una tensione  $V_{BE}$  e da una corrente  $I_B$  e una porta di uscita caratterizzata da una tensione  $V_{CE}$  e una corrente  $I_C$ .

## 1.1 Configurazione ad emettitore comune

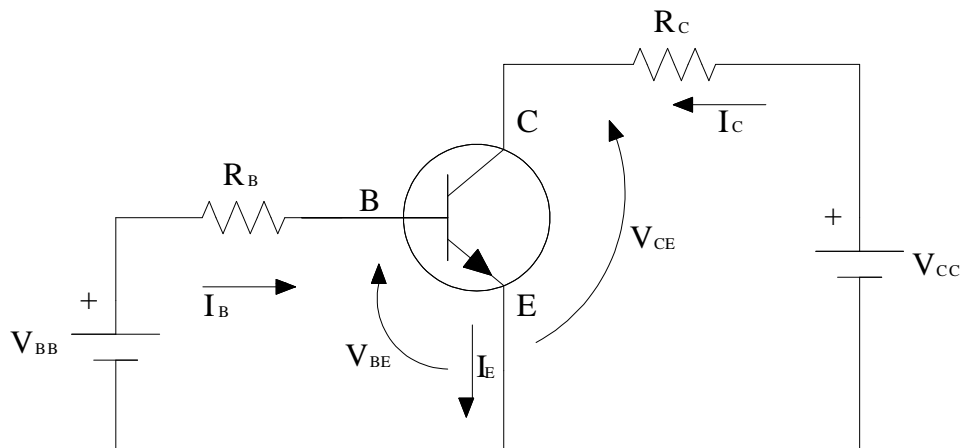


Figura 2 - Configurazione ad emettitore comune

Nella configurazione ad emettitore comune esistono tre relazioni fondamentali che legano le variabili espresse fino adesso e sono le seguenti:

$$I_b = f(V_{BE})$$

$$I_c = f(V_{CE})$$

$$I_c = f(I_b)$$

Dalle prime due relazioni si comprende che le due correnti  $I_b$  e  $I_c$  sono in funzione rispettivamente di  $V_{BE}$  e  $V_{CE}$  cioè dipendono da queste ultime; nell'ultima relazione si nota invece in legame tra la corrente di collettore e quella di base.

## 1.2 Caratteristica di ingresso

Per studiare il comportamento delle variabili nella porta di ingresso nel caso della configurazione ad emettitore comune si può procedere ponendo al circuito una  $V_{CE}$  costante e una corrente  $I_b$  variabile entrante nella base che di conseguenza produrrà una tensione  $V_{BE}$  proporzionale alla  $I_b$  stessa .

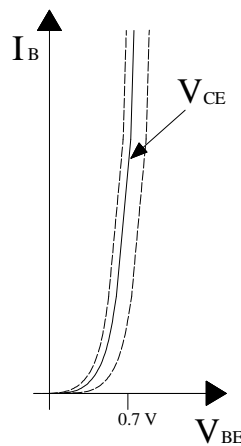


Figura 3 - Caratteristica di ingresso

Da questo grafico si osserva che a tensioni di  $V_{BE}$  minori di 0.7 Volt la corrente risulta essere molto bassa o addirittura nulla mentre con

l'aumentare della  $V_{BE}$  si nota il massimo passaggio di corrente nella base; da ciò si intuisce che ai capi Base-Emettitore è presente una giunzione di tipo PN come quella dei diodi e pertanto una tensione posta in ingresso avrà su essa una caduta di potenziale pari a 0.7 Volt. Si può inoltre notare che attribuendo diversi valori a  $V_{CE}$  la curva si sposterà di poco rendendo praticamente trascurabile la relazione tra la tensione  $V_{CE}$  (posta nella seconda maglia - porta di uscita) e la tensione  $V_{BE}$  (posta nella prima maglia - porta di ingresso).

Procediamo analizzando la porta di uscita.

### 1.3 Caratteristica di uscita

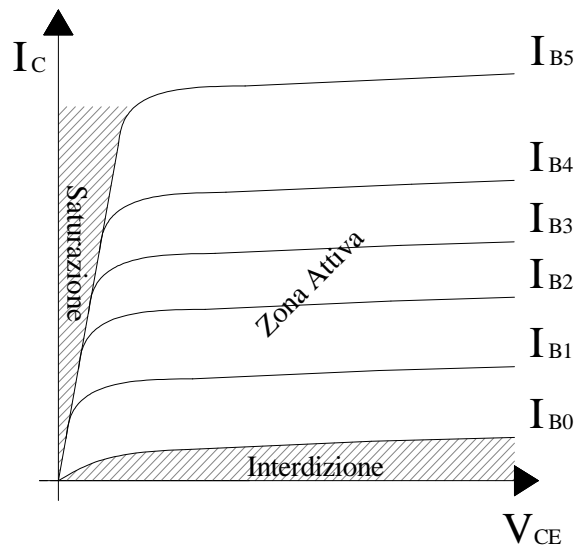


Figura 4 - Transcaratteristica di uscita

La transcaratteristica di uscita mette in relazione sia la corrente di collettore con la  $V_{CE}$  che la corrente di collettore con quella di base, ed è per il variare di quest'ultima che si producono molte curve. In questo grafico è possibile individuare tre distinte zone di lavoro del BJT: la zona di interdizione, la zona attiva e la zona di saturazione. In interdizione il BJT presenta una corrente  $I_c$  molto piccola circa pari a 0 e fisicamente è come se ci fosse un circuito aperto tra il collettore e l'emettitore. In zona attiva si nota una  $I_c$  dipendente dalla  $I_b$  formulabile con la seguente relazione:  $I_c = h_{FE} \cdot I_b$  dove  $h_{FE}$  è un numero puro ed è chiamato guadagno statico di corrente; questa zona di funzionamento viene utilizzata nell'ambito delle amplificazioni. In saturazione si nota una forte dipendenza di  $I_c$  dalla  $V_{CE}$  che, anche con piccole variazioni, può di conseguenza determinare una grande variazione della corrente di collettore; in questo modo si può vedere la giunzione Collettore Emettore come un corto circuito data la bassa resistenza.

## 2.0 Funzionamento in On -OFF o commutazione

Come è stato detto in precedenza, un transistor BJT può essere utilizzato come interruttore comandato da una corrente spostando il suo punto di funzionamento dalla zona di interdizione ( corrente  $I_c \approx 0$  ) a quella di saturazione ( corrente  $I_c = I_{cMAX}$  ). Per spostare verso l'alto il punto di funzionamento statico  $Q$  nella configurazione ad emettitore comune è necessario aumentare la corrente  $I_b$  e quindi diminuire il valore di

$R_b$  ottenendo così un aumento di  $I_c$  espresso dalla formula

$I_c = h_{FE} \cdot I_b$ . Ci si accorge di trovarsi in saturazione quando un

ulteriore aumento di  $I_b$  non comporta l'aumento di  $I_c$ , in tal caso la

massima corrente di collettore  $I_c$  raggiunta viene chiamata  $I_{cMAX}$  e la

porta di uscita della nostra configurazione può essere considerata come un

cortocircuito. Analiticamente la  $I_{cMAX}$  sarà data dalla seguente formula:

$I_{cMAX} = \frac{V_{CC}}{R_c}$  e la formula precedente può essere riscritta in questo modo:

$I_{cMAX} \leq h_{FE} \cdot I_b$ . In un circuito reale, a causa delle cadute di tensione interne al transistor (come quella tra il collettore e l'emettitore

denominata  $V_{ceSAT}$ ) e di tolleranze dei componenti, la saturazione

potrebbe discostarsi dal valore calcolato, perciò per essere sicuri che si

verifichi la saturazione si può attribuire al  $h_{FE}$  ( ha il difetto di variare con la temperatura) il suo valore minimo che si trova nel data sheet del transistor:

$$I_b \geq \frac{I_{cMAX}}{h_{FE_{MIN}}}$$

Per ottenere una saturazione sicura considerando anche le possibili tolleranze delle resistenze si aumenta la  $I_b$  di un 20% (chiamata  $I_{bSAT}$ ):

$$I_b \geq 1.2 \frac{I_{cMAX}}{h_{FE_{MIN}}}$$

### 3.0 Esercizio di progetto: BJT come interruttore comandato

Dato un dispositivo TTL avente funzione di controllo (tensione di uscita 5 Volt), realizzare un opportuna rete resistiva ad un transistor (TIP142) in grado di comandare una lampada alogena funzionante con una tensione di 12 Volt ad una potenza di 20 Watt. La lampada dovrà essere spenta alla presenza di 0 Volt e accesa alla presenza di 5 Volt in ingresso al transistor.

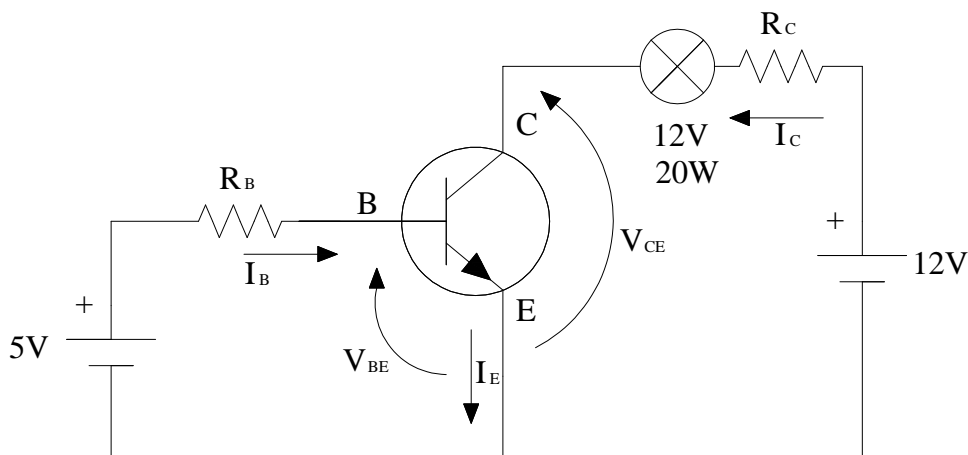


Figura 5 - Schema elettrico di una lampada comandata

Come prima cosa scriviamo un sistema di equazioni che interessa tutte le variabili utili per la risoluzione:

$$\begin{cases} V_{BB} - R_B \cdot I_B - V_{BE} = 0 \\ V_{CC} - R_C \cdot I_C - V_{CE} = 0 \\ I_C = h_{FE} \cdot I_B \\ I_E = I_C + I_B \end{cases}$$

La prima equazione è applicata alla maglia di ingresso ed è la seconda legge di Kirchhoff, la seconda è applicata alla maglia di uscita, la terza è l'equazione del guadagno statico di corrente mentre l'ultima è l'equazione fondamentale delle correnti di un transistor.

Conosciamo la potenza e l'alimentazione della lampada e da ciò calcoliamo la corrente da fornire (questa sarà poi la nostra  $I_c$ )

$$P = V \cdot I \quad I = \frac{P}{V} \quad \text{quindi} \quad I = \frac{20W}{12V} = 1.66A$$

Per conoscere il valore di  $h_{FE}$  è necessario cercarlo nel data sheet del componente in questione: nel nostro caso si utilizza un TIP 142 e il suo  $h_{FE}$  risulta essere di 1000.

Ora si procede sostituendo i valori nel sistema:

$$\begin{cases} 5V - R_B \cdot I_B - 0.7V = 0 \\ 12 - R_C \cdot 1.66A - V_{CESAT} = 0 \\ 1.66A = 1000 \cdot I_B \\ I_E = 1.66A + I_B \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5V - R_B \cdot 1.66 \cdot 10^{-3} A - 0.7V = 0 \\ 12 - R_C \cdot 1.66A - 2V = 0 \\ I_B = \frac{1.66A}{1000} = 1.66 \cdot 10^{-3} A \\ I_E = 1.66A + 1.66 \cdot 10^{-3} A \approx 1.66A \end{cases}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} R_B = \frac{5V - 0.7V}{1.66 \cdot 10^{-3} A} = 2590\Omega \\ R_C = \frac{12V - 2V}{1.66A} = 6\Omega \\ I_B = \frac{1.66A}{1000} = 1.66 \cdot 10^{-3} A \\ I_E = 1.66A + 1.66 \cdot 10^{-3} A \approx 1.66A \end{array} \right.$$

Nota: la  $V_{CESAT}$  è un dato che varia a seconda della corrente di base e di collettore e si trova nel datasheet del componente (per il TIP 142 equivale a  $V_{CESAT} = 2V$ )

Se si vuole costruire il circuito, dato che la  $R_B$  e la  $R_C$  calcolate non esistono in commercio, consiglio di utilizzare un valore di  $R_B$  più piccolo di 2590  $\Omega$  come 2200  $\Omega$ . Sconsiglio di applicare al circuito una  $R_C$  in quanto questa disperderebbe molto calore e dovrebbe necessariamente essere di potenza:  $P = 5.6\Omega \cdot (1.66A)^2 = 15.43W$

## 4.0 Studio della polarizzazione per via grafica

Il transistor a giunzione bipolare oltre ad essere utilizzato come interruttore comandato può essere utilizzato anche come amplificatore, polarizzandolo in modo da spostare il suo punto di lavoro in zona lineare ossia in zona attiva. Per comprendere meglio quanto appena detto possiamo rappresentare il punto di funzionamento sulle due caratteristiche.

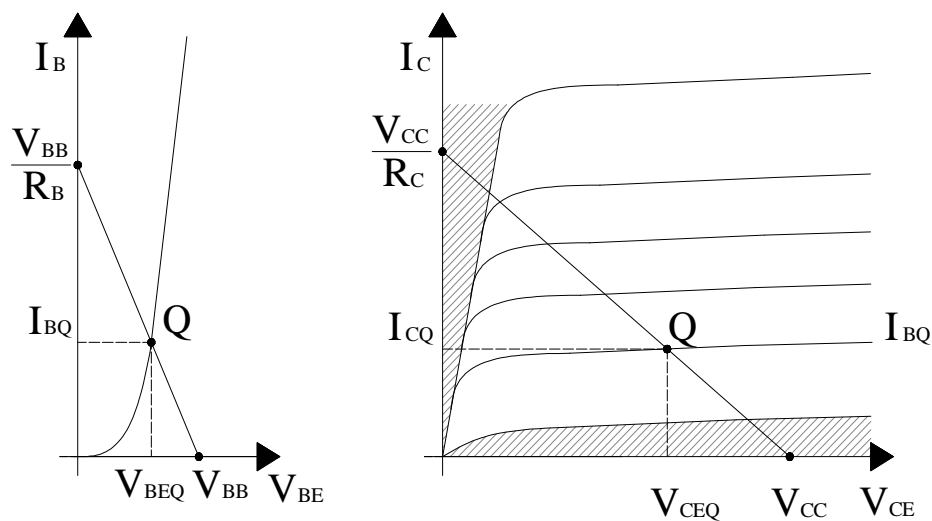


Figura 6 - Caratteristiche con retta di carico e punto di funzionamento statico

Nella prima figura notiamo nella curva della porta di ingresso una semiretta che passando dall'asse delle ascisse a quello delle ordinate incrocia la curva determinando un punto, chiamato punto di funzionamento statico in ingresso; l'inclinazione della curva è data dalla corrente di base (nel caso generale espressa come  $I_b = \frac{V_{BB}}{R_b}$ ) e dal valore di tensione applicata alla porta di ingresso. Questa prima rappresentazione rende maggiormente l'idea di come, se non si superi la tensione di 0.7 Volt in ingresso non si abbiano variazioni di corrente inoltre determina i valori di una  $V_{BEQ}$  e di una  $I_{BQ}$ .

Nella seconda figura notiamo la transcaratteristica di uscita attraversata da una retta che come nella prima figura attraversa il grafico. Questa ha un'inclinazione dipendente dalla corrente di collettore (nel caso generale espressa come  $I_C = \frac{V_{cc}}{R_c}$ ) e dal valore di tensione imposto sulla porta di uscita. Questo punto, noto come punto di funzionamento statico in uscita, determina una  $V_{CEQ}$  una  $I_{CQ}$  alla presenza di una certa  $I_{BQ}$  determinata nella prima caratteristica.

## 5.0 Polarizzazione ad emettitore comune con alimentazione singola

Oltre ad usare due alimentatori distinti per polarizzare un BJT è possibile utilizzare un'unica fonte di alimentazione utilizzando la regola del partitore di tensione.

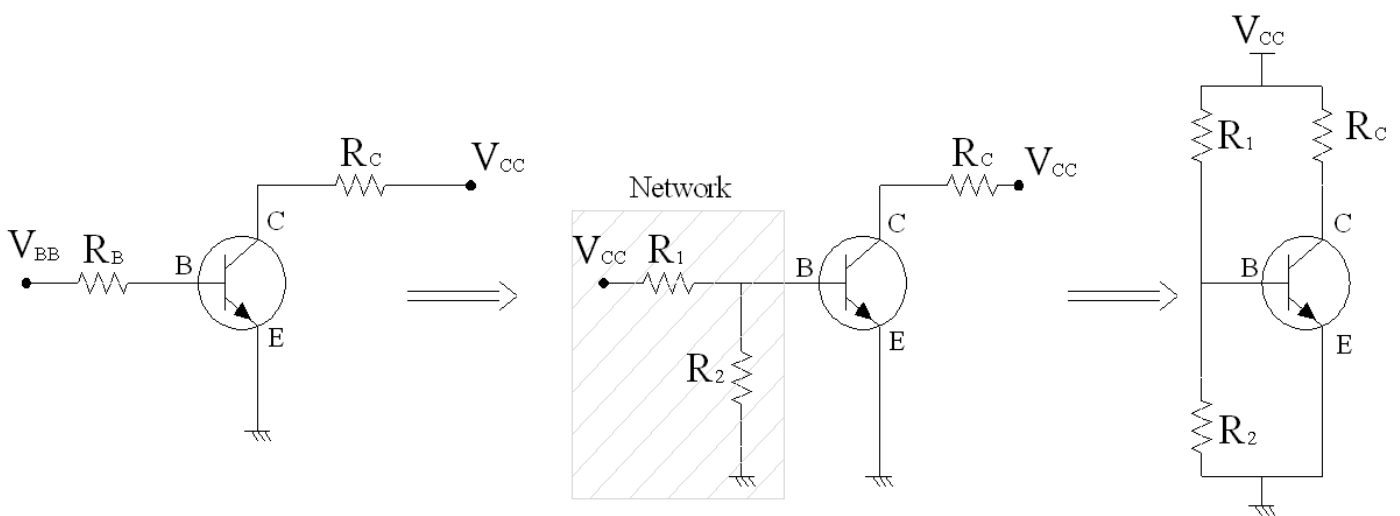


Figura 7 - Circuito con alimentazione singola

Il circuito rappresentato in figura non contiene più la resistenza  $R_B$  bensì due resistenze denominate  $R_1$  ed  $R_2$ . Guardando la figura si nota che la maglia di ingresso ha una resistenza equivalente Thevenin  $R_{eq}$  pari al parallelo delle due resistenze  $R_1$  ed  $R_2$  e una  $E_{eq}$  pari al partitore di

tensione ovvero 
$$E_{eq} = V_{CC} \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

## 6.0 Eliminare le variazioni di corrente indesiderate

Una volta studiato in teoria il comportamento ideale del transistor, passando alla fase di progettazione si potrebbero riscontrare dei valori piuttosto differenti da quelli ipotizzati. Il BJT non è quindi un componente del tutto ideale, e ciò dipende da determinate tolleranze dei valori di  $h_{FE}$  e  $V_{BE}$  che assumono differenti valori anche al variare della temperatura. Per evitare questo imprevisto si utilizza una resistenza  $R_E$  che retroaziona negativamente il transistor e ne limita la corrente di fuga.

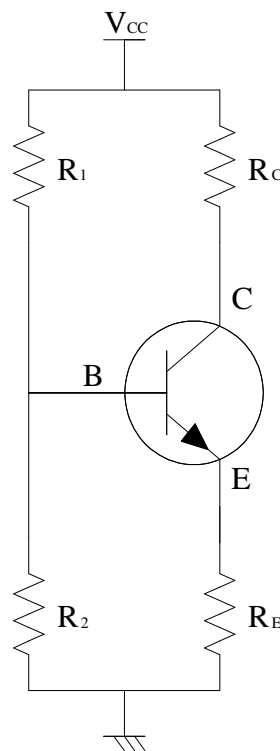


Figura 8 - Circuito retroazionato negativamente

Siccome il circuito possiede una resistenza in più, si deve aggiornare nel modo seguente il sistema precedentemente esposto utile per trovare il punto di funzionamento statico :

$$\begin{cases} V_{BB} - R_B \cdot I_B - V_{BE} - R_E \cdot I_E = 0 \\ V_{CC} - R_C \cdot I_C - V_{CE} - R_E \cdot I_E = 0 \\ I_C = h_{FE} \cdot I_B \\ I_E = I_C + I_B \end{cases}$$

Ponendo la resistenza  $R_E$  all'emettitore nel caso aumenti la corrente di collettore, la caduta di tensione su  $R_E$  aumenta, facendo diminuire la corrente di base. Di conseguenza, per la formula  $I_c = h_{FE} \cdot I_b$  diminuisce anche la corrente di collettore. Nel caso opposto, se la corrente di collettore diminuisce, la caduta di tensione su  $R_E$  diminuisce, facendo aumentare la corrente di base e di conseguenza sempre per la stessa legge la corrente di collettore. Per stabilizzare al meglio il punto di funzionamento si devono verificare i due seguenti casi:

$$V_{RE} = \frac{1}{10} \cdot V_{CC}$$

$$\frac{R_B}{R_E} = 20$$

## 7.0 Circuito amplificatore nella configurazione ad emettitore comune

La configurazione ad emettitore comune può essere studiata con un modello equivalente detto a parametri  $h$  in cui la si descrive con un circuito puramente resistivo, trascurando quindi le reattanze del BJT del modello reale; ed operando quindi con frequenze relativamente basse.

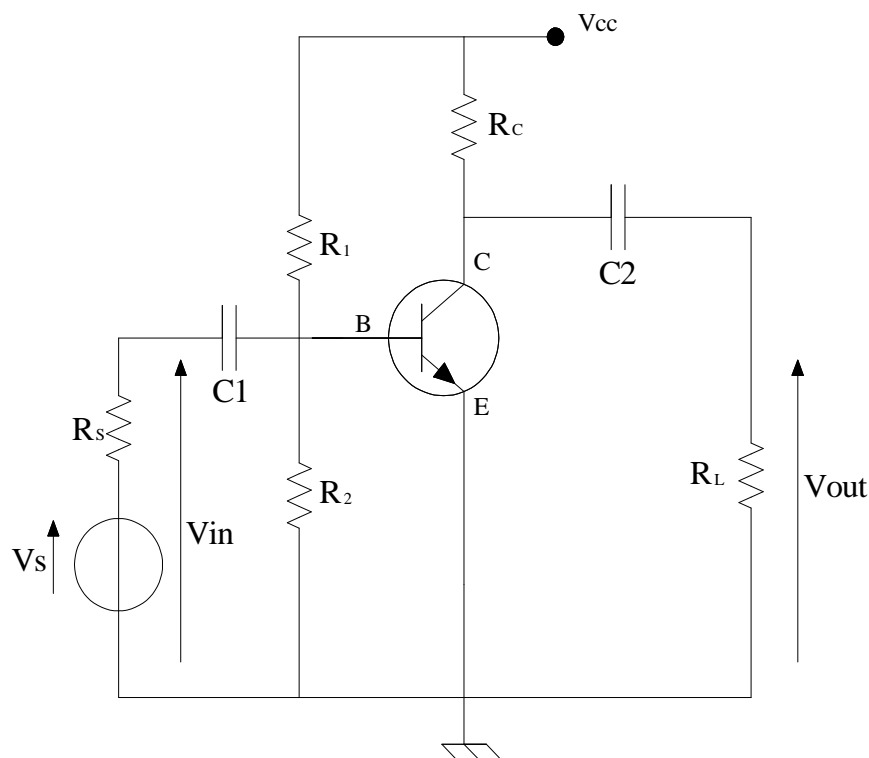


Figura 9 - Circuito amplificatore di segnale ad emettitore comune

Procedendo con l'analisi dinamica del circuito precedente (spegnendo il generatore di tensione continua e cortocircuitando i condensatori di bypass) si ottiene un circuito equivalente di questo tipo:

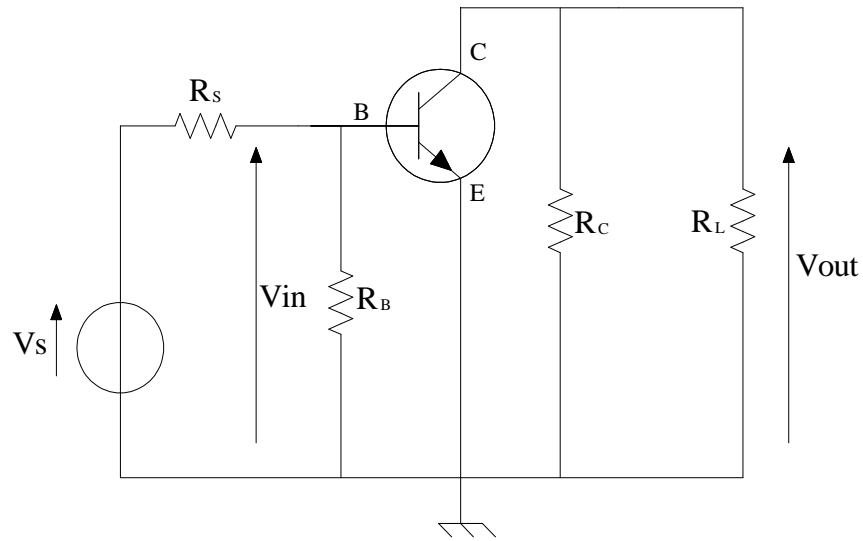


Figura 10 - Modello dinamico dell'amplificatore ad emettitore comune

La figura seguente rappresenta il circuito equivalente di un BJT a parametri h in configurazione ad emettitore comune:

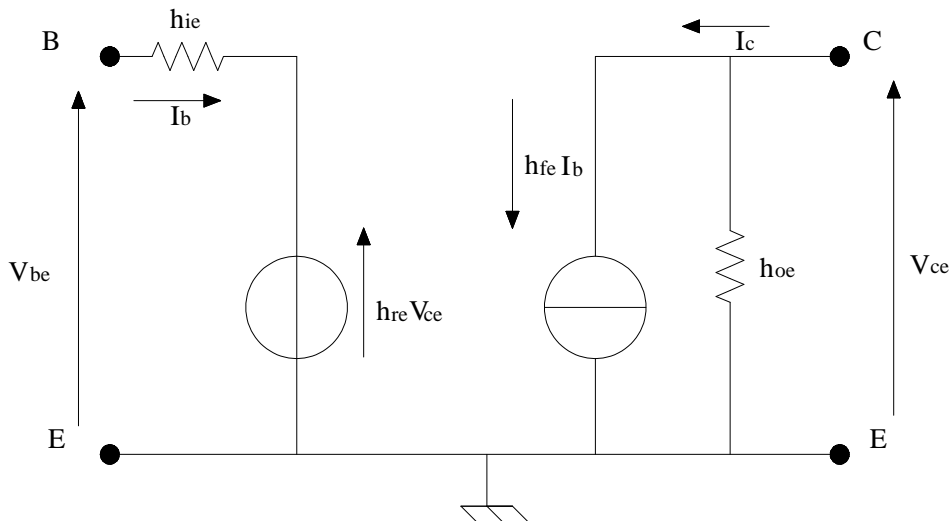


Figura 11 - Circuito equivalente a parametri h

## Significato dei parametri del circuito equivalente:

Il Parametro  $h_{ie}$ : Rappresenta la resistenza dinamica presente tra la base e l'emettitore e rappresenta la resistenza di ingresso del transistor che agisce sul segnale di ingresso. Essendo questa una resistenza, può essere calcolata nel seguente modo (si deve cortocircuitare

l'uscita): 
$$h_{ie} = \frac{V_{be}}{I_b}$$

Il Parametro  $h_{re}$ : Rappresenta l'amplificazione inversa di tensione mettendo in evidenza la capacità del transistor di trasferire parte della tensione di uscita al proprio ingresso. Generalmente questo parametro è trascurabile ma è possibile calcolarlo attraverso

questa formula: 
$$h_{re} = \frac{V_{be}}{V_{ce}}$$

Il Parametro  $h_{fe}$ : Rappresenta il guadagno statico di corrente (solitamente simile al guadagno dinamico  $h_{FE}$ ) e quindi l'amplificazione della corrente di collettore in funzione di quella di base. La formula per calcolarla

è la seguente: 
$$h_{fe} = \frac{I_c}{I_b}$$

Il Parametro  $h_{oe}$ : Rappresenta la conduttanza di uscita della configurazione ad emettitore comune e può essere calcolata con la seguente formula (spegnendo il generatore in ingresso):

$$h_{oe} = \frac{I_c}{V_{ce}}$$

Solitamente questo parametro è molto piccolo (nell'ordine delle decine di  $m\Omega^{-1}$ ) e per ciò viene trascurato.

### 8.0 Studio dell'amplificatore ad emettitore comune (trattazione non approssimata)

L'analisi del modello dinamico a parametri "h" precedentemente trattata, può essere migliorata prendendo in considerazione gli effetti della resistenza del generatore in ingresso e di un carico collegato in uscita stabilendo così il guadagno complessivo di corrente e di tensione.

Il circuito rappresentato sotto mette in evidenza la presenza nel modello dinamico di un generatore di tensione variabile (nel nostro caso

sinusoidale) di una sua resistenza serie  $R_S$  (dove  $s$  sta per source) e di una resistenza di carico  $R_L$ .

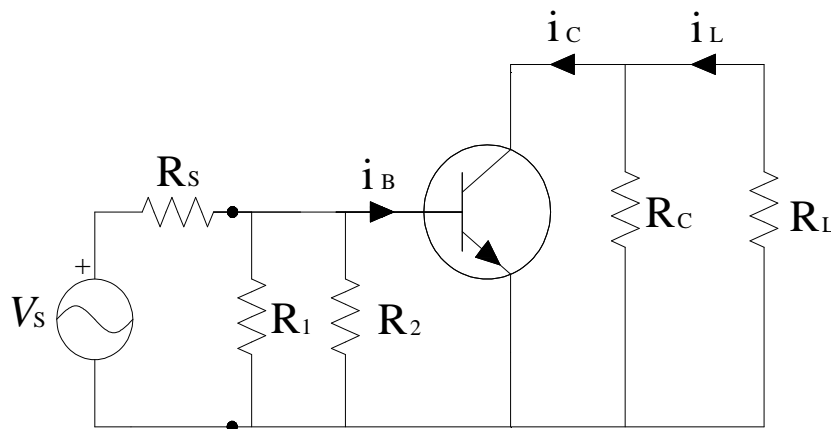


Figura 12 - Circuito dinamico amplificatore ad emettitore comune

Considerando il parallelo tra  $R_1$  ed  $R_2$  uguale ad  $R_B$  e il parallelo tra  $R_C$  ed  $R_L$  uguale ad  $R_P$  ridisegniamo il circuito:

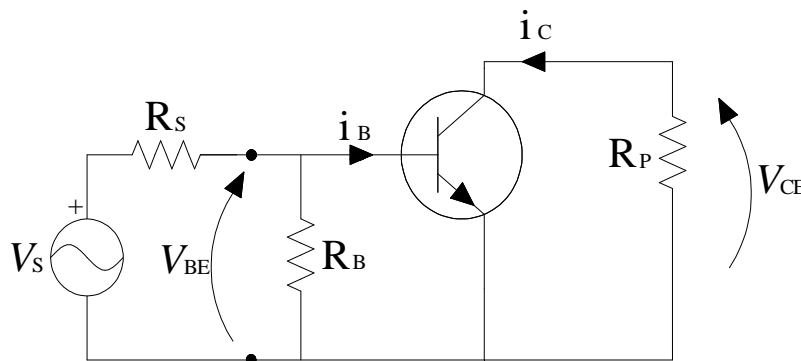


Figura 13 - Rappresentazione del circuito precedente con parallelo dei resistori

Ridisegnando il precedente circuito con la rappresentazione a parametri "h" otteniamo il modello equivalente finale:

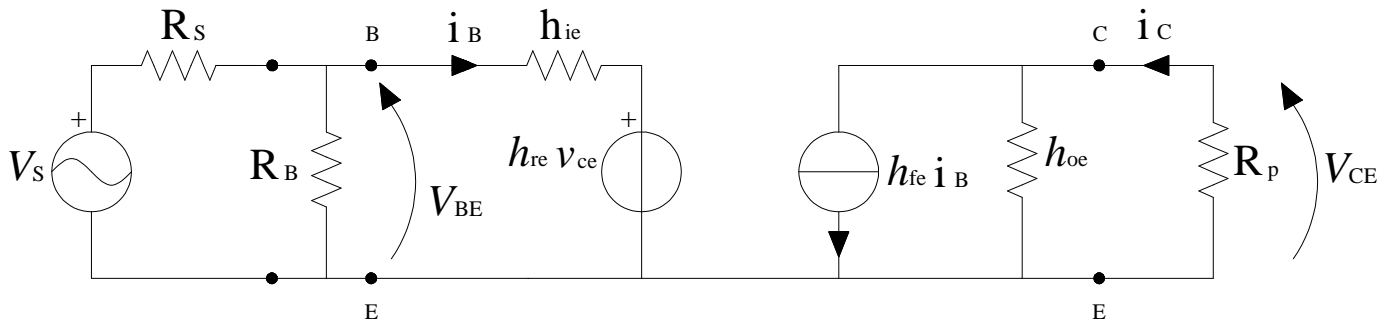


Figura 14 - Modello a parametri h finale

**Calcolo del guadagno di corrente totale:**

$$A_i = \frac{i_C}{i_B}$$

$$i_C = h_{fe} \cdot i_B + V_{CE} \cdot h_{oe} = h_{fe} \cdot i_B - h_{oe} \cdot R_P \cdot i_C$$

$$i_C + h_{oe} \cdot R_P \cdot i_C = h_{fe} \cdot i_B = i_C (1 + h_{oe} \cdot R_P)$$

$$A_i = \frac{h_{fe} \cdot i_B}{i_B \cdot (1 + h_{oe} \cdot R_P)} = \frac{h_{fe}}{1 + h_{oe} \cdot R_P} \cong h_{fe}$$

Il guadagno di corrente si avvicina a  $h_{fe}$  nel caso si ha una  $R_P$  molto più bassa dell'inverso della conduttanza  $h_{oe}$  ( $R_P \ll \frac{1}{h_{oe}}$ )

**Calcolo del guadagno di corrente sul carico:**

$$A_{iL} = \frac{i_L}{i_B}$$

Sapendo che la corrente  $i_L$  è pari al partitore di corrente:

$$i_L = i_C \cdot \frac{R_C}{R_L + R_C}$$

Il guadagno sul carico risulta essere:

$$A_{iL} = \frac{i_L}{i_B} = \frac{i_L}{i_B} \cdot \frac{i_C}{i_C} = \frac{i_L}{i_C} \cdot \frac{i_C}{i_B} = \frac{R_C}{R_L + R_C} \cdot A_i$$

**Calcolo della resistenza d'ingresso:**

$$\begin{aligned} R_{in} &= \frac{v_{BE}}{i_B} = \frac{h_{ie} \cdot i_B + h_{re} \cdot v_{CE}}{i_B} = \frac{h_{ie} \cdot i_B - h_{re} \cdot R_p \cdot i_C}{i_B} = \\ &= \frac{h_{ie} \cdot i_B - h_{re} \cdot R_p \cdot A_i \cdot i_B}{i_B} = h_{ie} - h_{re} \cdot R_p \cdot A_i \end{aligned}$$

Il secondo termine del secondo membro dell'uguaglianza può essere trascurato nel caso  $R_p$  non risulti molto elevata dato che  $h_{re}$  è un numero molto piccolo. In tal caso la resistenza di ingresso sarà uguale a  $h_{ie}$ .

La resistenza vista ai capi del generatore in ingresso cortocircuitando l'uscita vale invece:

$$R'_{in} = \frac{R_{in} \cdot R_B}{R_{in} + R_B}$$

**Calcolo del guadagno di tensione:**

$$A_v = \frac{v_{CE}}{v_{BE}} = \frac{-R_p \cdot i_c}{R_{in} \cdot i_B} = -\frac{R_p}{R_{in}} \cdot \frac{i_c}{i_B} = -\frac{R_p}{R_{in}} \cdot A_i$$

Si può notare che il guadagno di tensione risulta più grande di quello di corrente nel caso  $R_p$  sia maggiore di  $R_{in}$ .

Se si vuole utilizzare il modello semplificato ( $R_{in} = h_{ie}$  ed  $A_i = h_{fe}$ ) si otterrà la seguente espressione:

$$A_v = -\frac{R_p}{h_{ie}} \cdot h_{fe}$$

**Calcolo del guadagno di tensione totale:**

Prendendo esempio dal calcolo del guadagno di tensione precedente, determiniamo il guadagno di tensione totale dell'amplificatore tenendo conto degli effetti che provoca la resistenza del generatore.

$$A_{vt} = \frac{V_{CE}}{V_s} = \frac{V_{CE}}{V_s} \cdot \frac{V_{BE}}{V_{BE}} = \frac{V_{CE}}{V_{BE}} \cdot \frac{V_{BE}}{V_s} = A_v \cdot \frac{V_{BE}}{V_s}$$

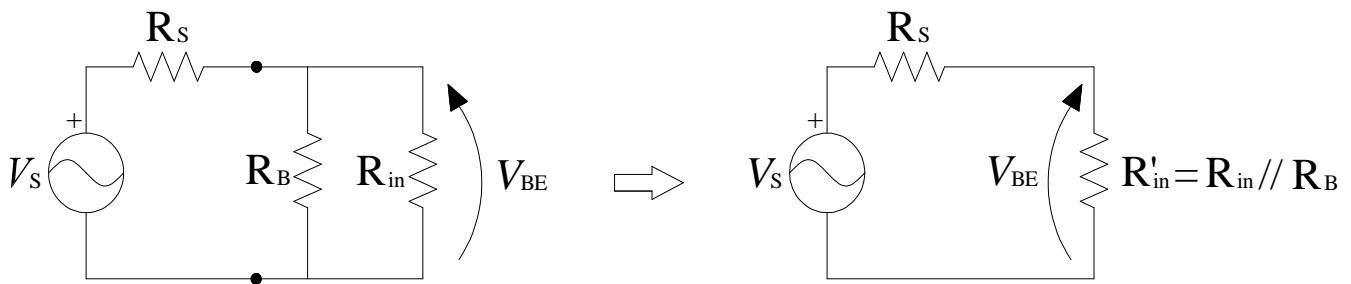


Figura 15 - Interazione tra la resistenza del generatore, la resistenza di base e la resistenza di ingresso del BJT

$$V_{BE} = V_s \cdot \frac{R'_{in}}{R'_{in} + R_s}$$

$$\frac{V_{BE}}{V_s} = \frac{R'_{in}}{R'_{in} + R_s}$$

Il guadagno complessivo di tensione viene espresso quindi con la seguente espressione:

$$A_{vt} = A_v \cdot \frac{R'_{in}}{R'_{in} + R_s} = A_v \cdot \alpha \quad \text{con } \alpha < 1$$

### Calcolo della resistenza d'uscita:

Per procedere al calcolo della resistenza d'uscita si deve analizzare il modello a parametri "h" con il generatore di tensione  $V_s$  cortocircuitato.

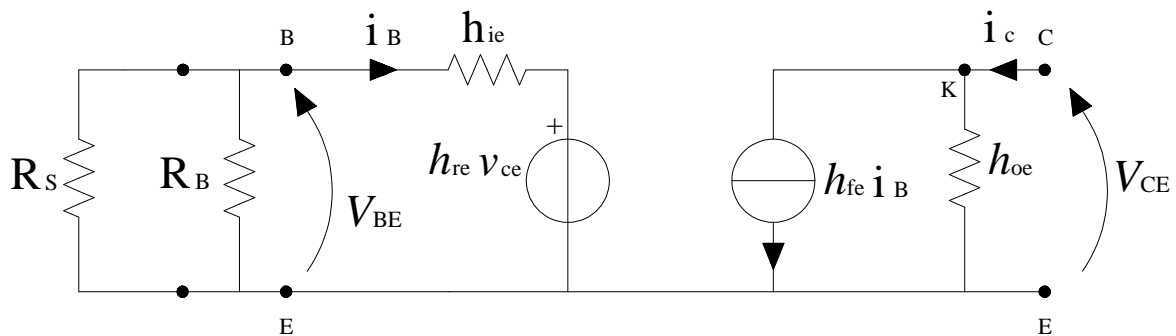


Figura 16 - Modello a parametri h con generatore in ingresso cortocircuitato

$$R_{out} = \frac{v_{ce}}{i_c}$$

Applichiamo il primo principio di Kirchhoff al nodo "K":

$$i_C = h_{oe} \cdot V_{CE} + h_{fe} \cdot i_B$$

Applichiamo il secondo principio di Kirchhoff alla maglia di ingresso:

$$i_B \cdot \left( \frac{R_s \cdot R_B}{R_s + R_B} \right) + i_B \cdot h_{ie} + h_{re} \cdot v_{CE} = 0$$

$$i_B \cdot \left( \frac{R_s \cdot R_B}{R_s + R_B} + h_{ie} \right) + h_{re} \cdot v_{CE} = 0$$

$$i_B = - \frac{h_{re} \cdot v_{CE}}{\left( \frac{R_s \cdot R_B}{R_s + R_B} + h_{ie} \right)}$$

Uniamo le due espressioni in un sistema e risolviamo:

$$\begin{cases} i_C = h_{oe} \cdot V_{CE} + h_{fe} \cdot i_B \\ i_B = - \frac{h_{re} \cdot v_{CE}}{\left( \frac{R_s \cdot R_B}{R_s + R_B} + h_{ie} \right)} \end{cases}$$

$$i_C = h_{oe} \cdot V_{CE} - h_{fe} \cdot \frac{h_{re} \cdot v_{CE}}{\left( \frac{R_s \cdot R_B}{R_s + R_B} + h_{ie} \right)}$$

$$i_C = V_{CE} \cdot \left[ h_{oe} - \frac{h_{re} \cdot h_{fe}}{\left( \frac{R_s \cdot R_B}{R_s + R_B} + h_{ie} \right)} \right]$$

$$\frac{1}{R_{out}} = h_{oe} - \frac{h_{re} \cdot h_{fe}}{\left( \frac{R_s \cdot R_B}{R_s + R_B} + h_{ie} \right)}$$